А.П. Карпенко, Н.К. Соколов, *МГТУ им. Н.Э. Баумана, Москва*

ОЦЕНКА СЛОЖНОСТИ СЕМАНТИЧЕСКОЙ СЕТИ В ОБУЧАЮЩЕЙ СИСТЕМЕ

1. Введение

Современные обучающие системы представляют собой интеллектуальные системы, построенные на основе парадигмы обработки знаний. При этом формализация онтологии предметной области выполняется в виде базы знаний, которая может быть реализована на основе продукционной модели знаний, семантической сети, фреймовой модели знаний и на основе формальной логической модели знаний.

В статье полагается, что база знаний обучающей системы построена на основе семантической сети, содержащей понятия предметной области изучаемой дисциплины и отношения между этими понятиями. Семантическая сеть представляется в виде ориентированного графа, вершины которого соответствуют понятиям предметной области изучаемой дисциплины, а дуги задают отношение «определяемое понятие — определяющее понятие» между ними. Более строго, такая сеть классифицируется как однородная (с единственным типом отношений между понятиями) и бинарная (отношения связывают только по два понятия).

Полагается также, что обучающая система реализует способ создания учебных материалов на основе «сборки» их из предварительно разработанных модулей (module) или разделяемых единиц контента (SCO — Shareable Content Object). Такую технологию поддерживает широко известный стандарт SCORM [1], а также оригинальная отечественная разработка, называемая технологией разделяемых единиц контента (ТРЕК) [2]. В отличие от технологии SCORM, ТРЕК обеспечивает взаимосвязь между модулями путём задания указанных выше отношений между понятиями, определёнными в этих модулях.

Важной задачей современной обучающей системы является педагогическая диагностика [3]. Стратегия диагностики, используемая в обучающей системе, зависит, прежде всего, от целей обучения, которые реализует эта система. Среди традиционных целей обучения выделяются следующие цели: приобретение знаний; приобретение навыков и приобретение умений [4]. Данная статья ориентирована на достижение первой из этих целей и связана с организацией контроля знаний в обучающей системе.

Контроль знаний в обучающей системе является многоплановой проблемой. В статье рассматривается одна из актуальных граней этой проблемы — контроль усвоения субъектом обучения понятий предметной области изучаемой дисциплины, а также взаимосвязей этих понятий [5].

Для решения задачи контроля понятийных знаний можно использовать тестовую подсистему обучающей системы или в рамках этой системы разрабатывать подсистему автоматического контроля понятийных знаний (см., например, программный продукт «Сеть научных понятий» [6]).

Во всех случаях для оценки уровня усвоения понятийных знаний требуется оценка сложности понятий, модулей, репозитариев (библиотек) модулей и обучающих курсов. Эти же оценки необходимы для формирования индивидуальной образовательной траектории в интеллектуальной обучающей системе, менеджмента качества учебного процесса, проектирования учебных планов образовательных программ и пр.

Задачу оценки сложности учебного материала следует рассматривать в контексте более широкой задачи оценки качества этого материала. Данная задача не нова. Так, ещё в работе [7] предложена такая формальная мера сложности учебного материала, как мера его «разнообразия». Для вычисления значений этой меры используется классический подход Клода Шеннона: в качестве меры разнообразия принимается логарифм числа элементов, составляющих учебный материал.

В работе [8] с узлами семантической сети (понятиями) связывается картинка, видеоизображение, аудиосегмент или текст и рассматриваются некоторые меры этих сущностей. В качестве одной из таких мер предлагается использовать меру количества информации, по Колмогорову А.Н., заключённой в этой сущности. Значение указанной меры можно оценить размером соответствующего файла, сжатого с помощью современных алгоритмов сжатия.

В публикации [9] предлагается оценивать качество семантической сети с помощью следующих критериев: достоверность (степень безошибочности данных); кумулятивность (свойство данных небольшого объёма достаточно полно отражать соответствующую предметную область); непротиворечивость (отсутствие взаимоисключающих понятий).

В диссертации [10] в качестве меры качества учебного материала предлагается использовать его объём, а также нечёткие экспертные оценки сложности этого материала.

В отличие от указанных работ, в данной статье меры сложности строятся на основе таких параметров семантической сети, как количество входных и выходных понятий, рёберная плотность и диаметр графа, соответствующего этой сети и т. д.

Раздел 2 статьи вводит основные обозначения. Некоторые меры сложности, рассматриваемые здесь, основаны на использовании метрик графов. Поэтому в разделе 3 даны определения этих метрик. В разделе 4 рассматриваются меры сложности понятий, в разделах 5, 6 — меры сложности модулей, в разделах 7,8 — меры сложности библиотек модулей, в разделах 9, 10 — меры сложности учебных курсов. В заключение сформулированы основные выводы.

Организация в обучающей системе контроля понятийных знаний субъекта обучения может требовать использования расширенной семантической сети [5], которую следует отнести к неоднородным и, возможно, N-арным семантическим сетям. К необходимости построения такой сети приводит также задача планирования в обучающей системе индивидуальной траектории обучения. В качестве меры сложности такой сети и её фрагментов могут использоваться некоторые из мер, рассмотренных в данной статье. Систематическое рассмотрение мер сложности расширенной семантической сети, полагается, составит предмет самостоятельной публикации.

2. Модель семантической сети

2.1. Понятия и модули

Будем обозначать модули рассматриваемой библиотеки знаний m_i, i = 1,2. Назовём входным понятием (input concept) модуля m_i понятие $\bar{c}_{i,j}$, определение которого дано в некотором другом модуле библиотеки знаний L или иной библиотеке знаний. Набор входных понятий модуля m_i обозначим $\bar{C}_i = \{\bar{c}_{i,j}, j \in [1, \bar{n}_i]\}$, где $\bar{n}_i \geq 0$ — общее количество входных понятий. Из набора $\bar{C}_i$ выделим входные понятия $\overline{CI}_i$, определённые в данной библиотеке знаний L, и входные понятия $\overline{CE}_i$, определение которых содержится в других библиотеках. Таким образом, $\bar{C}_i = \overline{CI}_i \cup \overline{CE}_i$. Отметим, что одно или оба из множеств, $\overline{CI}_i$, $\overline{CE}_i$ могут быть пустыми.

Аналогично назовём выходным понятием (output concept) модуля m_i понятие $c_{i,j}$, определение которого дано в данном модуле m_i. Набор выходных понятий модуля m_i обозначим $C_i = \{c_{i,j}, j \ni [1,n_i]\}$, где $n_i \geq 0$ — общее количество выходных понятий.

Каждое из понятий $C_{i,j}$, $j \ni [1,n_i]$ определяется через одно или несколько понятий из наборов $\bar{C}_i$, C_i. Обозначим $\bar{C}_{i,j} = \{\bar{c}_{i,j}, k \ni [1: \bar{n}_{i,j}]\}$ совокупность понятий набора $\bar{C}_i$, которые используются при определении понятия $c_{i,j}$. Аналогично обозначим $C_{i,j} = \{c_{i,j,k}, k \ni [1: n_{i,j}], k \neq j\}$ понятия набора C_i, которые используются при определении понятия $c_{i,j}$. Здесь $\bar{n}_{i,j} \geq$ ≥ 0, $n_{i,j} \geq 0$ — количество таких понятий. Таким образом, будем полагать, что понятие $c_{i,j}$ определяется с помощью множества понятий $\bar{C}_{i,j} \cup C_{i,j}$. Одно или оба из множеств, $\bar{C}_{i,j}$, $C_{i,j}$ могут быть пустыми. Отметим, что ситуация $\bar{C}_{i,j} = 0$, $C_{i,j} = 0$ означает, что понятие $c_{i,j}$ определяется без привлечения других понятий.

Понятия из наборов, $\bar{C}_{i,j}$, $C_{i,j}$ будем называть информационно связанными (в узком смысле) с понятием $c_{i,j}$. Если понятие $c_{i,j}$ информационно связано с понятием $c_{i,k}$, и это понятие информационно связано с понятием $c_{i,j}$, то будем говорить, что понятия $c_{i,j}$, $c_{i,k}$ информационно связаны в широком смысле. Если понятие $c_{i,k}$, определённое в модуле m_1, информационно связано с понятием $\bar{c}_{1,j}$, которое является входным понятием модуля m_1 и, одновременно, выходным понятием модуля m_2, т.е. $\bar{c}_{1,j} = c_{2,k}$ то также будем говорить, что понятия $c_{1,k}$, $c_{2,k}$ информационно связаны в широком смысле.

Семантическую сеть $S(m_i)$ модуля m_i будем представлять в виде ориентированного графа без контуров $G(m_i)$, вершины которого соответствуют понятиям наборов $\bar{C}_i$, C_i а дуги отношениям «определяемое понятие — определяющее понятие» между ними. Другими словами, дуги в графе $G(m_i)$ соответствуют информационным связям понятий из наборов, $\bar{C}_i$, C_i между собой.

Введённые обозначения иллюстрирует рис. 2.1. Модуль m_1 на этом рисунке использует три входных понятия $\bar{c}_{1,1}$, $\bar{c}_{1,2}$, $\bar{c}_{1,3}$ ($\bar{n}_1 = 3$), и в модуле определены четыре выходных понятия, $c_{1,1}$, $c_{1,2}$, $c_{1,3}$, $c_{1,4}$ ($n_1 = 4$). Понятие $c_{1,4}$, к примеру, определяется с помощью двух входных понятий модуля и двух его выходных понятий: $\bar{C}_{1,4} = \{\bar{c}_{1,2}, \bar{c}_{1,3}\}$; $C_{1,4} = \{c_{1,2}, c_{1,3}\}$

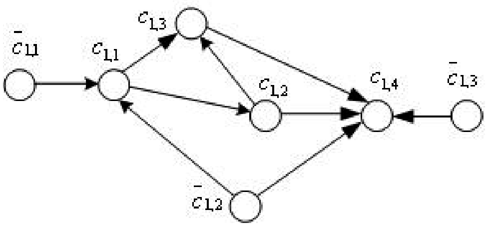

Рис. 2.1. Пример графа $G(m_1)$ семантической сети модуля m_1

Аналогично информационным связям понятий определены информационные связи моделей. Модули m_i и m_j будем называть информационно связанными модулями, если хотя бы одно выходное понятие модуля m_i является входным понятием для модуля m_j или если хотя бы одно выходное понятие модуля m_j является входным понятием для модуля m_i.

Отметим следующее важное обстоятельство. В соответствии с концепцией технологии разделяемых единиц контента, одно и то же понятие может быть определено в разных модулях библиотеки знаний L (в то же время ни одно из понятий не может быть определено в разных модулях учебного курса T). Назовём такие понятия кратными понятиями. Кратность понятия $C_{i,J}$ обозначим $K_{i,j} \geq 1$. Если не оговорено противное, будем далее полагать кратные понятия различными понятиями.

Современные интеллектуальные обучающие системы обеспечивают выполнение следующих правил расположения описаний понятий в модуле:

— ни одно из понятий k-го уровня ЯПФ модуля не может быть введено до тех пор, пока не определены все понятия всех расположенных ниже уровней ЯПФ (см. п. 3);

— при выполнении первого правила, описания понятий k-го уровня ЯПФ могут быть введены в модуле в произвольном порядке.

Наряду с этим современные обучающие системы разрешают использование в модуле понятий, которые ещё не определены в данном модуле, а будут определены в нём позже. Такие понятия называются внутренними ссылочными понятиями. В терминах ЯПФ ссылка на понятие означает, что в тексте модуля при определении понятий k-го уровня используется понятие одного из расположенных выше уровней. Количество внутренних ссылочных понятий, используемых в модуле m_i, обозначается $l_i \geq 0$.

Ссылочное понятие может быть также внешним ссылочным понятием. Если в тексте некоторого модуля m_{i_s} учебного курса T используется понятие, которое определено в модуле m_{i_k}, $K > j$, то для модуля m_{i_s} это понятие является внешним ссылочным. Здесь принято, что если $K > j$, то модуль m_{i_k} в курсе T текстуально расположен позже модуля m_{i_s}. Количество внешних ссылочных понятий модуля m_i обозначается $l_i \geq 0$.

2.2. Библиотека модулей

Пусть библиотека модулей L рассматриваемой предметной области состоит из М модулей m_i, т.е. $L = \bigcup_{i-1}^{M} m_i$.

Семантическую сеть $S(L)$ библиотеки L будем представлять в виде ориентированных графов $G(L)$, $G(L)$, первый из которых называется понятийным графом библиотеки L, а второй — графом информационных связей модулей этой библиотеки или её информационно-логическим графом. Графы $G(L)$ могут иметь контуры, количество которых обозначается $e(G(L)) = e(L)$, $e(G(L)) = e(L)$, соответственно.

Граф $G(L)$ представляет собой объединение графов семантических сетей всех модулей библиотеки L, т. е. $G(L) = \bigcup_{i-1}^{M} G(m_i)$.

Вершины взвешенного мультиграфа $G(L)$ соответствуют модулям библиотеки L, а дуги — информационным связям модулям между собой. В отличие от графа $G(L)$, на рисунках дуги графа $G(L)$ изображаются жирным; рядом с дугами в качестве их веса указываются количества информационных связей между соответствующими модулями. Другими словами, если $V_{i,j}$ выходных понятий модуля m_i используются в качестве входных понятий модуля m_j, то рядом с соответствующей дугой в качестве её веса указывается величина $V_{i,j}$.

2.3. Учебный курс

Учебный курс, подготовленный из всех или некоторой совокупности модулей библиотеки L, обозначается T; $T \subseteq L$ В набор T входят модули $m_{i_1}, m_{i_x}, m_{i_z}$ библиотеки L, где $N \le M$ — количество модулей в курсе. Текстуально модули в учебном курсе T расположены именно в порядке $m_{i_1}, m_{i_x}, \ldots, m_{i_z}$ т.е. первым расположен модуль m_{i_1}, вторым — модуль m_{i_x} и т. д.

Аналогично библиотеке L, семантическую сеть $S(T)$ курса T будем представлять в виде ориентированных графов $G(T)$, $G(T)$, где граф $G(T)$ называется понятийным графом курса T, а граф $G(T)$ — графом информационных связей модулей этого курса или, другими словами, его информационно-логическим графом. Поскольку допускаются контуры в графах $G(L)$, $G(L)$, графы $G(T)$, $G(T)$ также могут иметь контуры, количество которых обозначается $e(G(T)) = e(T)$, $e(G(T)) = e(T)$, соответственно.

Граф $G(T)$ представляет собой объединение графов семантических сетей всех модулей библиотеки L, входящих в учебный курс T, т.е. $G(T) = \bigcup_{j\in[1-N]} G(m_{i_s})$.

Во взвешенном мультиграфе $G(T)$ вершины соответствуют модулям $m_{i_1}, m_{i_x}, \ldots, m_{i_z}$, а дуги — информационным связям модулям между собой. Аналогично графу $G(L)$ дуги графа $G(T)$ изображаются на рисунках жирным, а рядом с дугами в качестве их веса указывается кратность дуг.

3. Метрики графа семантической сети

3.1. Высота графа

Рассмотрим ярусно-параллельную форму (ЯПФ) ориентированного графа без контуров G [12]. ЯПФ орграфа G строится по следующему алгоритму:

— на первый ярус ЯПФ помещаются все те вершины графа G, в которые не входят дуги от других вершин графа;

— ...

— на k-й уровень помещаются те вершины графа G, в которые входят дуги только от его вершин, расположенных на предыдущих $(k - 1)$ ярусах; $k \geq 1$.

Проиллюстрируем этот алгоритм на примере графа $G(m_i)$. Если множество $\bar{C}_i$ не пусто, то на первом ярусе ЯПФ этого графа размещаются входные понятия $\bar{C}_i$ модуля m_i; на втором ярусе — понятия, определяемые только с помощью понятий $\bar{C}_i$; на третьем ярусе — понятия, определяемые только с помощью понятий $\bar{C}_i$ и понятий второго яруса и т. д. (см. рис. 3.1). Если модуль m_i не использует входных понятий, т.е. если множество $\bar{C}_i$ пусто, то на первом ярусе соответствующей ЯПФ располагаются выходные понятия этого модуля, которые в своих определениях не содержат других понятий.

Номер яруса ЯПФ графа G, на котором находится вершина этого графа, называется высотой вершины, количество ярусов в ЯПФ графа G называется высотой ЯПФ этого графа (см. рис. 3.1).

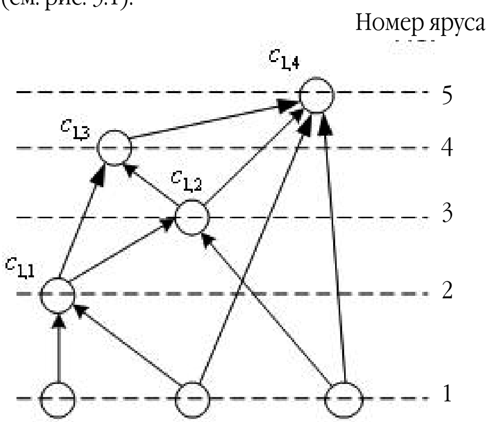

Рис. 3.1. Пример. Граф $G(m_1)$ в ярусно-параллельной форме (см. рис. 2.1)

Высоту вершины $C_{i,j}$ в графе $G(m_i)$ будем называть высотой понятия $C_{i,j}$ и обозначать $h(c_{i,j})$. Высота понятия зависит от контекста, в котором рассматривается данное понятие. Поясним данное утверждение примером.

Пример 3.1. Пусть учебный курс T состоит из модулей m_1, m_2, и граф $G(m_1)$ первого из них в ярусно-параллельной форме представлен на рис. 3.1, а граф $G(m_2)$ второго, также в ярусно-параллельной форме, — на рис. 3.2. Положим, что в качестве входных понятий модуля m_1 используются следующие понятия модуля m_2: $\bar{c}_{1,1} - \bar{c}_{2,1}$; $\bar{c}_{1,2} - \bar{c}_{1,2}$; $\bar{c}_{1,3} - \bar{c}_{2,2}$. Тогда в ярусно-параллельной форме понятийный граф $G(T)$ учебного курса T будет иметь вид, представленный на рис. 3.3 (а). Из этого рисунка следует, что высота понятия $c_{1,3}$ в нём равна 6. Высота того же понятия в графе $G(m_1)$, представленном на рис. 3.1, равна, легко видеть, 4

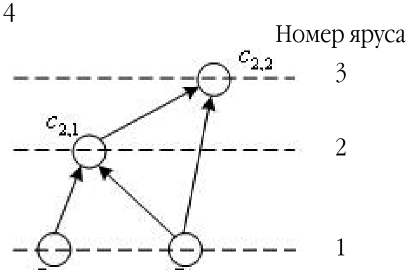

Рис. 3.2. Пример. Граф $G(m_2)$ модуля m_2 в ярусно-параллельной форме

Контекст, в котором рассматривается высота понятия, будем обозначать над индексом, так что $h(c_{i,j})$, $h^K(c_{i,j})$, $h^T(c_{i,j})$ — высоты понятия $c_{i,j}$, определённого в модуле m_i, в библиотеке L и учебном курсе T, соответственно. В последнем случае полагается, что модуль m_i входит в число модулей курса T.

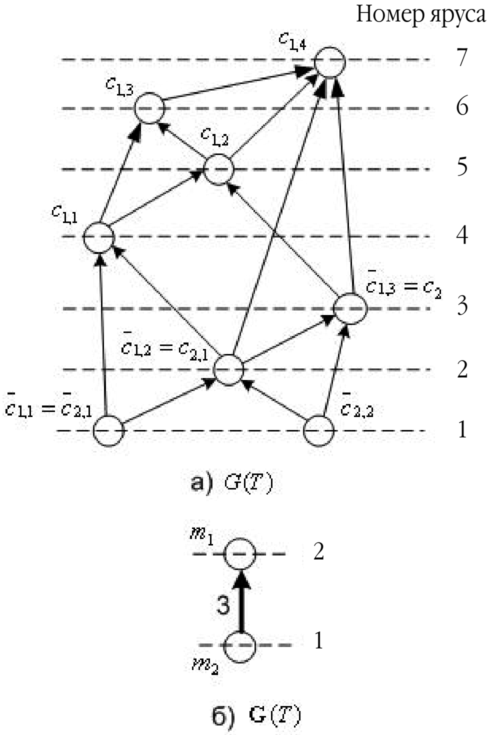

Рис. 3.3. К примеру 3.1. Графы $G(T)$, $\mathrm{G}(T)$ учебного курса $T = m_1 \cup m_2$ (см. рис. 3.1, 3.2)

Высоту ЯПФ графа $G(m_i)$ будем называть высотой модуля m_i и обозначать $h(G(m_i))=h(m_i)$. По аналогии определяются высоты библиотеки $h(G(L)) = h(L)$, $h(\mathrm{G}(L)) = \mathrm{h}(L)$ и высоты учебного курса $h(G(T)) = h(T)$, $h(\mathrm{G}(T)) = \mathrm{h}(T)$. Таким образом $h(L)$, $h(T)$ — высоты библиотеки L и курса T для соответствующих понятийных графов, а $\mathrm{h}(L)$, $\mathrm{h}(T)$ — те же высоты, но для графов информационных связей модулей.

Легко видеть, например, что для курса T, состоящего из модулей m_1, m_2 (см. рис. 3.3 (б)), $h(T) = 7$, а $\mathrm{h}(T) = 2$.

В случае если граф G имеет контуры, применение рассмотренного алгоритма построения его ЯПФ приводит к тому, что, начиная с некоторого уровня, оказывается невозможным ни одну из оставшихся вершин отнести к следующему уровню. При обнаружении этого факта необходимо разорвать одну или несколько из дуг, соединяющих оставшиеся вершины. Можно предложить несколько правил выбора таких дуг, например:

— выбирается дуга, входящая в первую из оставшихся вершин;

— если в результате этой процедуры продолжение построения ЯПФ графа G оказывается возможным, продолжить это построение;

— в противном случае, по тому же правилу выбрать следующую дугу и т. д.

Разные правила выбора разрываемых дуг могут приводить к ЯПФ графа G, имеющим разные высоты. С точки зрения мер сложности семантической сети, построенных на основе высоты ЯПФ соответствующих графов, вероятно, правильными были бы такие разрывы, которые приводят к максимальной высоте ЯПФ этих графов. Однако, с нашей точки зрения, решение такой задачи требует неоправданно больших вычислительных затрат и можно ограничиться рассмотренным выше правилом выбора разрезаемых дуг.

Будем далее полагать, что при построении ЯПФ графов $G(L)$, $\mathrm{G}(L)$, $G(T)$, $\mathrm{G}(T)$, имеющих контуры, реализуется то или иное правило выбора разрываемых дуг, так что возможно построить ЯПФ этих графов и определить значения соответствующих высот.

Отметим, что при построении ЯПФ графа G одновременно решается задача обнаружения факта наличия в нём контуров.

3.2. Диаметр графа

В качестве метрики графа G нам понадобится также его диаметр d [13]. Диаметром графа (неориентированного) G называется максимальное расстояние между двумя вершинами этого графа. Расстоянием между вершинами графа называется минимальное количество рёбер графа, связывающих эти вершины.

Диаметр графа $G(m_i)$ обозначается $d(G(m_i)) = d(m_i)$. Кроме того, в работе используются диаметры $d(G(L)) = d(L)$, $d(G(T)) = d(T)$ понятийных графов библиотеки L и учебного курса T, а также диаметры $d(G(L)) = d(L)$, $d(G(T)) = d(T)$ графов информационных связей модулей библиотеки L и курса T, соответственно.

При вычислении диаметров графов, фигурирующих в работе, эти графы рассматриваются как неориентированные.

Рассмотрим для примера граф $G(T)$, изображённый на рис. 3.3 (а). Расстояние между вершинами $\bar{c}_{2,1}$, $c_{1,4}$ этого графа равно 2 (см. путь $\bar{c}_{2,1}$, $c_{2,1}$, $c_{1,4}$, а не путь $\bar{c}_{2,1}$, $c_{1,1}$, $c_{1,3}$, $c_{1,4}$, например). Диаметр $d(T)$ того же графа равен 3, поскольку расстояние между двумя его самыми удалёнными вершинами, $\bar{c}_{2,2}$, $c_{1,3}$ (или $c_{2,1}$, $c_{1,2}$) равно 3. Диаметр $\mathrm{d}(T)$ графа $\mathrm{G}(T)$, приведённого на рис. 3.3(б), равен 1.

Отметим следующее обстоятельство. Поскольку при определении диаметра графа G этот граф рассматривается как неориентированный граф, этот диаметр может быть найден и в том случае, когда граф G имеет контуры.

3.3. Рёберная плотность графа

Ещё одной графовой метрикой, используемой в работе, является рёберная плотность графа (ориентированного или неориентированного) G [13], определяемая формулой

$$b(G)=\frac{2a}{\beta(\beta-1)}\ ,$$

где a — количество дуг графа G, а β — количество его вершин. Рёберная плотность $b(G) \in (0,1)$ характеризует близость графа G к полносвязному графу (клике): чем ближе $b(G)$ к единице, тем выше связность графа G и он ближе к полносвязному графу.

Рёберную плотность графа $G(m_i)$ будем обозначать $b(G(m_i)) = b(m_i)$. Аналогично диаметрам $d(L)$, $d(T)$, $\mathrm{d}(L)$, $\mathrm{d}(T)$ в работе используются рёберные плотности $b(G(L)) = b(L)$, $b(G(T)) = b(T)$ понятийных графов библиотеки L и учебного курса T, а также рёберные плотности, $b(G(L)) = \mathrm{b}(L)$, $b(G(T)) = = \mathrm{b}(T)$ графов информационных связей модулей библиотеки L и курса T, соответственно.

Рассмотрим для примера, графы $G(T)$, $\mathrm{G}(T)$ изображённые на рис. 3.3 (а), рис. 3.3 (б). Рёберные плотности этих графов равны, соответственно $b(T) = \dfrac{2*13}{8*7} \approx 0,46$, $\mathrm{b}(T) = \dfrac{2*1}{2*1} \approx 1$ (поскольку граф $G(T)$ является, очевидно, полносвязным графом).

Отметим следующее важное обстоятельство: рёберная плотность графа имеет значительно меньшую вычислительную сложность по сравнению вычислительной сложностью его высоты и диаметра.

4. Постановка задачи

Ставится следующая задача: сформировать меры сложности понятий $\mu(c_{\bar{i},j})$, меры сложности модулей $\mu(m_i)$, меры сложности библиотек модулей $\mu(L)$ и меры сложности учебных курсов $\mu(T)$, значения которых можно определять автоматически — только путём анализа графов $G(m_i)$, $G(L)$ и $\mathrm{G}(L)$, $G(T)$ и $\mathrm{G}(T)$, соответственно.

Значение меры сложности понятия может зависеть от контекста, в котором производится оценка этой значения. В обозначениях меры сложности понятий соответствующий контекст будем указывать над индексом. Так, мера $\mu(c_{i,j})$ означает сложность понятия $c_{i,j}$ в рамках модуля m_i, мера $\mu^K(c_{i,j})$ — ту же сложность в рамках библиотеки L, мера $\mu^T(c_{i,j})$ — в пределах курса T.

Аналогично мерам сложности понятий, вводятся меры сложности модулей $\mu(m_i)$, $\mu^K(m_i)$, $\mu^T(m_i)$.

Среди мер сложности библиотеки L выделяются меры сложности, построенные на основе графов $G(L)$, $\mathrm{G}(L)$. Будем обозначать эти меры $\mu(L) = \mu(G(L))$, $\mu(\mathrm{L}) = \mu(\mathrm{G}(L))$, соответственно.

Аналогично вводятся меры сложности $\mu(T) = \mu(G(T))$, $\mu(\mathrm{T}) = \mu(\mathrm{G}(T))$ учебного курса T.

Выделим два класса мер сложности понятий и модулей.

Меру сложности понятия $\mu(c_{i,j})$ будем называть контекстно-независимой мерой, если $\mu(c_{i,j}) = \mu^K(c_{i,j}) = \mu^T(c_{i,j})$, и контекстно-зависимой мерой — в противном случае. Аналогично, мера сложности модуля $\mu(m_i)$ называется контекстно-независимой, если $\mu(m_i) = \mu^K(m_i)$ и $\mu(m_i) = \mu^T(m_i)$, и контекстно-зависимой — иначе.

Очевидно, что, при прочих равных условиях, определение значений контекстно-независимых мер требует меньших вычислительных затрат. Поэтому при отсутствии сильных преимуществ мы будем стремиться к использованию именно этих мер.

Большие значения всех рассматриваемых в работе мер соответствуют большим значениям сложности соответствующих объектов.

В работе предложено значительное количество мер сложности понятий, модулей, библиотек модулей и учебных курсов. В этой связи возникают следующие вопросы. Как много мер следует использовать? Какие из этих мер предпочтительнее? Каковы критерии такого выбора?

При поиске ответов на поставленные вопросы, на наш взгляд следует руководствоваться следующими соображениями.

1. Следует учитывать особенности человеческой системы переработки информации. Так, результаты некоторых экспериментов показывают, что на пределе человеческих возможностей находится задача классификации объектов по трём классам, характеризуемых семью критериями и всего двумя градациями на шкалах их оценок [14]. Исходя из этого, можно рекомендовать использование, по возможности, не большего количества мер — не более семи.

2. Предпочтение следует отдавать тем мерам сложности, значения которых имеют простую содержательную интерпретацию.

3. При прочих равных условиях, преимуществом обладают меры, имеющие меньшую вычислительную сложность.

5. Меры сложности понятий

5.1. Мера сложности $\mu_1(c_{i,j})$

Мера $\mu_1(c_{i,j})$ представляет собой взвешенное количество понятий в наборах $\underline{C}_{i,j}$, $C_{i,j}$:

$$\mu_1(c_{i,j}) = \mu_1(\lambda, c_{i,j}) = \lambda \underline{n}_{i,j} + n_{i,j}, \quad (5.1)$$

где $\lambda \in [0,1]$ — весовой множитель.

Как следует из формулы (5.1), мера $\mu_1(c_{i,j})$, по сути, является двухкритериальной и представляет собой аддитивную свёртку частных мер $\bar{n}_{i,j}, n_{i,j}$ [15]. Содержательно мера $\mu_1(c_{i,j})$ означает, что выходное понятие модуля, при определении которого используется большее количество входных понятий этого модуля, а также других его выходных понятий, позиционируется как более сложное. Заметим, что в соответствии с определением меры $\mu_1(c_{i,j})$, мера входного понятия равна нулю: $\mu_1(\bar{c}_{i,j}) = 0$.

Очевидно, что если вес λ один и тот же для всех модулей библиотеки L, то мера $\mu_1(c_{i,j})$ не зависит от того контекста, в котором рассматривается понятие $c_{i,j}$, т.е. $\mu_1(c_{i,j}) = \mu_1{}^K(c_{i,j}) = \mu_1{}^T(c_{i,j})$. Таким образом, имеем *Утверждение 5.1.* Если во всех модулях библиотеки L вес λ один и тот же, то мера $\mu_1(c_{i,j})$ является контекстно-независимой.

В качестве примера рассмотрим учебный курс T, граф семантической сети которого представлен на рис. 3.3. Легко видеть, что справедливы следующие оценки: $\mu_1(1,c_{1,4})=4$, $\mu_1(1,c_{1,2}) = 2$, $\mu_1(0,5,c_{1,2}) =1,5$ и т. д.

5.2. Мера сложности $\mu_2(c_{i,j})$

В качестве меры сложности $\mu_2(c_{i,j})$ рассматривается высота понятия $c_{i,j}$:

$\mu_2(c_{i,j}) = h(c_{i,j})$. (5.2)

Отметим, что в соответствии с этим определением сложность входных понятий модуля, а также понятий, при определении которых не используется ни одно из других понятий, равна единице.

Содержательно мера (5.2) означает следующее. Усвоение субъектом обучения понятия $c_{i,j}$ требует усвоения им также тех понятий уровня $(h(c_{i,j}) - 1)$, которые информационно связаны с понятием $c_{i,j}$; усвоение последних понятий требует усвоения соответствующих понятий уровня $(h(c_{i,j}) - 2)$ и т.д. до первого уровня. Таким образом, усвоение понятий, имеющих большую высоту, требует больших усилий. Поэтому логично полагать сложность понятия пропорциональной его высоте.

Поскольку высота понятия является контекстно-зависимой величиной (см. п. 3), имеет место *Утверждение 5.2.* Мера $\mu_2(c_{i,j})$ является контекстно-зависимой и $\mu_2(c_{i,j}) \le \mu_2{}^K(c_{i,j})$, $\mu_2{}^K(c_{i,j}) \le \mu_2{}^T(c_{i,j}) \Rightarrow$

Поясним последнее неравенство. Положим, что среди понятий, информационно-связанных с понятием $c_{i,j}$, в библиотеке L содержится два кратных понятия, имеющих разную высоту. При формировании учебного курса T в него войдёт только одно из этих понятий. Если этим понятием будет понятие с меньшей высотой, то имеем $\mu_2{}^K(c_{i,j}) < \mu_2{}^T(c_{i,j})$, в противном случае — $\mu_2{}^K(c_{i,j}) = \mu_2{}^T(c_{i,j})$.

Рассмотрим в качестве примера модуль m_2 (см. Рис. 3.2). Для этого модуля имеем: $\mu_2(c_{2,1}) = 2$, $\mu_2(c_{2,2}) = 3$ и т.д. Для курса T, граф семантической сети которого представлен на рис. 3.3, аналогично имеем $\mu_2{}^T(c_{1,4}) = 7$, $\mu_2{}^T(c_{1,3}) = 6$ и т. д.

5.3. Мера $\mu_3(c_{i,j})$

В качестве меры $\mu_3(c_{i,j})$ используется количество понятий, информационно связанных в широком смысле с понятием $c_{i,j}$.

Очевидно, что если высота понятия $c_{i,j}$ равна единице, то мера $\mu_3(c_{i,j})$ совпадает с мерой $\mu_1(c_{i,j})$ и её значение равно нулю.

Для определения значений мер $\mu_3{}^K(c_{i,j})$, $\mu_3{}^T(c_{i,j})$ следует в библиотеке L и учебном курсе T подсчитать общие количества понятий, информационно связанных в широком смысле с понятием $c_{i,j}$, соответственно.

Аналогично утверждению 5.2 имеем *Утверждение 5.3.* Мера $\mu_3(c_{i,j})$ является контекстно-зависимой и $\mu_3(c_{i,j}) \leq \mu_3^K(c_{i,j})$, $\mu_3^K(c_{i,j}) \leq \mu_3^T(c_{i,j}) \Rightarrow$

Для примера, рассмотрим модуль m_1 (см. рис. 3.1) и учебный курс T (см. рис. 3.3). Из указанных рисунков легко видеть, что имеют место следующие оценки: $\mu_3(c_{1,4}) = 6, \mu_3(c_{1,2}) = 4$; $\mu_3^T(c_{1,4}) = 7, \mu_3^T(c_{1,1}) = 3$.

5.4. Мультимера $\mu(c_{i,j})$

Мультимера $\mu(c_{i,j})$ представляет собой аддитивную свёртку мер $\mu_1(\lambda, c_{i,j})$, $\mu_2(c_{i,j})$, $\mu_3(c_{i,j})$:

$\mu(c_{i,j}) = \mu(\lambda, \rho, c_{i,j}) = \rho_1 \mu(c_{i,j}) + \rho_2 \mu_2(c_{i,j}) + \rho_3 \mu_3(c_{i,j})$, (5.3)

где $(\rho_1, \rho_2, \rho_3) = \rho$ — вектор весовых множителей $\rho_1 \in [0,1]$, k = 1,2,3.

Аддитивная свёртка частных критериев оптимальности, используемая (5.3), является наиболее популярным приёмом сведения многокритериальной задачи к однокритериальной. Наряду с этим могут использоваться мультипликативные свёртки, лексикографическое упорядочение и пр. [15]. Мы здесь и далее ограничимся только аддитивной свёрткой.

Из утверждений 5.1–5.3 вытекает справедливость следующего утверждения.

Утверждение 5.4. Мультимера $\mu(c_{i,j})$ является контекстно-зависимой и $\mu(c_{i,j}) \leq \mu^K(c_{i,j})$, $\mu^K(c_{i,j}) \leq \mu^T(c_{i,j}) \Rightarrow$

Положим $\lambda = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{3}$ и рассмотрим в качестве примера сложность понятия $c_{2,2}$ (см. рис. 3.2). Легко видеть, что $\mu_1(c_{2,2}) = 2$, $\mu_2(c_{2,2}) = 3$, $\mu_3(c_{2,2}) = 3$. Таким образом,

$\mu(c_{2,2}) = \frac{1}{3}(\mu_1(c_{2,2}) + \mu_2(c_{2,2}) + \mu_3(c_{2,3})) = \frac{1}{3}(2+3+3) \approx 2{,}67$.

Резюмируя данный раздел, отметим, что с точки зрения простоты интерпретации и минимума вычислительной сложности, из числа рассмотренных мер сложности понятий к применению можно рекомендовать меру $\mu(1, c_{i,j})$ — взвешенное количество понятий, через которое определяется данное понятие, а также меру $\mu_3(c_{i,j})$ — количество понятий, информационно связанных в широком смысле с данным понятием. Другими словами, можно рекомендовать к использоваиню мультимеру $\mu(c_{i,j})$, в которой $\lambda = 1$, $\rho_2 = 0$.

6. Меры сложности модулей, построенные на основе мер сложности понятий

6.1. Меры сложности $\mu_1(m_i)$, $\mu_1(m_i)$ строятся на основе меры сложности понятий $\mu_1(c_{i,j})$ (см. п. 5.1):

$$\mu_1(m_i) = \mu_1(\lambda, m_i) = \sum_j \mu_1(\lambda, c_{i,j}),\ j \in [1:n_i]; \quad (6.1)$$

$$\bar{\mu}_1(m_i) = \bar{\mu}_1(\lambda, m_i) = \frac{\mu_1(\lambda, m_i)}{n_i}. \quad (6.2)$$

То есть мера $\mu_1(m_i)$ представляет собой сумму мер $\mu_1(c_{i,j})$ всех выходных понятий модуля m_i, а мера $\bar{\mu}_1(m_i)$ — ту же меру $\mu_1(m_i)$, но усреднённую по количеству этих понятий. Другими словами, меры $\mu_1(m_i)$, $\mu_1(m_i)$ — это сумма и усреднённая сумма количеств понятий, связанных в узком смысле с каждым из выходных понятий модуля m_i, соответственно. Отметим, что входные понятия модуля m_i не учитываются в формулах (6.1), (6.2) потому, что их мера $\mu_1(\Rightarrow)$ равна нулю (см. п. 5.1).

Поскольку мера $\mu_1(c_{i,j})$ не зависит от контекста (см. утверждение 5.1), меры $\mu_1(m_i)$,

$\bar{\mu}_1(m_i)$ также не зависят от контекста, т.е. $\mu_1(m_i) = \mu_1^K(m_i) = \mu_1^T(m_i)$, $\bar{\mu}_1(m_i) = \bar{\mu}_1^K(m_i) = \bar{\mu}_1^T(m_i)$. Таким образом, имеем:

Утверждение 6.1. Меры $\mu_1(m_i)$, $\bar{\mu}_1(m_i)$ являются контекстно-независимыми ⇒

Рассмотрим для примера модуль m_2 (см. рис. 3.2). Легко видеть, что $\mu_1(c_{2,1}) = 2$, $\mu_1(c_{2,2}) = 2$; $\mu_1(1,m_2) = \mu(c_{2,1}) + \mu(c_{2,2}) = 4$; $\bar{\mu}_1(1,m_2) = \dfrac{\mu(1,m_2)}{2} = 2$.

6.2. Меры сложности $\mu_2(m_i), \bar{\mu}_2(m_i)$

Меры $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$ формируются на основе меры $\mu_2(c_{i,j})$ (см. п. 5.2):

$$\mu_2(m_i) = \sum_j \mu_2(\bar{c}_{i,j}) + \sum_k \mu_2(c_{i,k}), \quad j \in [1:\bar{n}_i], \; k \in [1:n_i]; \tag{6.3}$$

$$\bar{\mu}_2(m_i) = \frac{\mu_2(m_i)}{\bar{\mathrm{n}}_i + \mathrm{n}_i}. \tag{6.4}$$

Таким образом, аналогично мерам $\mu_1(m_i)$, $\bar{\mu}_1(m_i)$, мера $\mu_2(m_i)$ представляет собой сумму мер $\mu_2(\Rightarrow)$ всех входных и выходных понятий модуля m_i, а мера $\bar{\mu}_2(m_i)$ — ту же меру $\mu_2(m_i)$, но усреднённую по суммарному количеству входных и выходных понятий модуля m_i. Другими словами, меры $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$ есть сумма и усреднённая сумма высот всех входных и выходных понятий модуля m_i, соответственно. В отличие от мер $\mu_1(m_i)$, $\bar{\mu}_1(m_i)$, входные понятия модуля m_i учитываются в формулах (6.3), (6.4), поскольку для этих понятий мера $\mu_2(\Rightarrow)$ не равна нулю (см. п. 5.2).

Из того факта, что мера $\mu_2(c_{i,j})$ является контекстно-зависимой (см. утверждение 5.2), следует справедливость следующего утверждения:

Утверждение 6.2. Меры $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$ являются контекстно-зависимыми и

$\mu_2(m_i) \le \mu_2^K(m_i)$, $\mu_2^K(m_i) \le \mu_2^T(m_i)$;

$\bar{\mu}_2(m_i) \le \bar{\mu}_2^K(m_i)$, $\bar{\mu}_2^K(m_i) \le \bar{\mu}_2^T(m_i)$ ⇒

В качестве примера рассмотрим модуль m_1, граф семантической сети которого приведён на рис. 3.1. Из этого рисунка следует, что:

$\mu_2(\bar{c}_{1,1}) = \mu_2(\bar{c}_{1,2}) = \mu_2(\bar{c}_{1,3}) = 1$;
$\mu_2(c_{1,1}) = 2$, $\mu_2(c_{1,2}) = 3$, $\mu_2(c_{1,3}) = 4$,
$\mu_2(c_{1,4}) = 5$.

Таким образом,

$$\mu_2(m_i) = \sum_{j-1}^{3} \mu_2(\bar{c}_{i,j}) + \sum_{k-1}^{4} \mu_2(c_{1,k}) = (1+1+1) + (2+3+4+5) = 17,$$

$$\bar{\mu}_2(m_1) = \frac{\mu_2(m_1)}{3+4} = \frac{17}{7} \approx 2{,}43. \tag{6.4}$$

6.3. Меры сложности $\mu_3(m_i), \bar{\mu}_3(m_i)$.

Меры $\mu_3(m_i)$, $\bar{\mu}_3(m_i)$ формируются на основе меры $\mu_3(c_{i,j})$ (см. п. 5.3):

$$\mu_3(m_i) = \sum_j \mu_3(c_{i,j}), \; j \in [1:n_i]; \tag{6.5}$$

$$\bar{\mu}_3(m_i) = \frac{\mu_3(m_i)}{n_i}. \tag{6.6}$$

Таким образом, меры $\mu_3(m_i)$, $\bar{\mu}_3(m_i)$ представляют собой сумму и усреднённую сумму количеств выходных понятий, информационно связанных в широком смысле с каждым из понятий модуля m_i, соответственно. Поскольку мера $\mu_3(c_{i,j})$ входных понятий модуля равна нулю (см. п. 5.3), в отличие от мер $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$, меры (6.5), (6.6) не включают в себя меры сложность этих понятий.

Из утверждения 5.3 вытекает справедливость следующего утверждения:

Утверждение 6.3. Меры $\mu_3(m_i)$, $\bar{\mu}_3(m_i)$ являются контекстно-зависимыми и

$\mu_3(m_i) \le \mu_3^K(m_i)$, $\mu_3^K(m_i) \le \mu_3^T(m_i)$;

$\bar{\mu}_3(m_i) \le \bar{\mu}_3^K(m_i)$, $\bar{\mu}_3^K(m_i) \le \bar{\mu}_3^T(m_i)$ ⇒

Рассмотрим для примера модуль m_2 (см. рис. 3.2). Из того факта, что $\mu_3(c_{2,1}) = 2$,

$\mu_3(c_{2,2}) = 4$, имеем:

$$\mu_3(m_2) = \mu_3(c_{2,1}) + \mu_3(c_{2,2}) = 2 + 4 = 6;$$

$$\bar{\mu}_3(m_2) = \frac{\mu_3(m_2)}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$

6.4. Мультимеры сложности $\mu_+(m_i)$, $\bar{\mu}_+(m_i)$ формируются на основе мультимеры $\mu(\lambda,\rho,c_{i,j})$ (см. п. 5.4) и определяются выражениями

$$\mu_+(m_i) = \mu_+(\lambda,\rho,m_i) = \sum_j \mu(\bar{c}_{i,j}) + \sum_k \mu(c_{i,k}),$$
$j \in [1:\bar{n}_i]$, $k \in [1:n_i]$; (6.7)

$$\bar{\mu}_+(m_i) = \bar{\mu}_+(\lambda,\rho,m_i) = \frac{\mu_+(\lambda,\rho,m_i)}{\bar{n}_i + n_i}. \quad (6.8)$$

Таким образом, меры $\mu_+(m_i)$, $\bar{\mu}_+(m_i)$ представляют собой сумму и усреднённую сумму значений аддитивной свёртки мер $\mu(\lambda,c_{i,j})$, $\mu_2(c_{i,j})$, $\mu_3(c_{i,j})$ для всех понятий (и входных и выходных) модуля m_i, соответственно.

Из утверждения 5.4 вытекает справедливость следующего утверждения:

Утверждение 6.4. Меры $\mu_+(m_i)$, $\bar{\mu}_+(m_i)$ являются контекстно-зависимыми и

$$\mu_+(m_i) \le \mu_+{}^K(m_i), \ \mu_+{}^K(m_i) \le \mu_+{}^T(m_i) \ \Rightarrow$$

Положим $\lambda = 1, \rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \frac{1}{3}$, и рассмотрим для примера модуль m_2 (см. рис. 3.2). Для понятий $\bar{c}_{2,1}$, $\bar{c}_{2,2}$, $c_{2,1}$, $c_{2,2}$ имеем, соответственно:

$\mu_1(\bar{c}_{2,1}) = 0;\ \mu_2(\bar{c}_{2,1}) = 1;\ \mu_3(\bar{c}_{2,1}) = 0;\ \mu(\bar{c}_{2,1}) = 1;$

$\mu_1(\bar{c}_{2,2}) = 0;\ \mu_2(\bar{c}_{2,2}) = 1;\ \mu_3(\bar{c}_{2,2}) = 0;\ \bar{\mu}(c_{2,2}) = 1;$

$\mu_1(c_{2,1}) = 2;\ \mu_2(c_{2,1}) = 2;\ \mu_3(c_{2,1}) = 2;\ \mu(c_{2,1}) = 6;$

$\mu_1(c_{2,2}) = 2;\ \mu_2(c_{2,2}) = 3;\ \mu_3(c_{2,2}) = 4;\ \mu(c_{2,2}) = 9.$

Таким образом,

$$\mu_+(m_2) = \mu(\bar{c}_{2,1}) + \mu(\bar{c}_{2,2}) + \mu(c_{2,1}) + \mu(c_{2,2}) = 1 + 1 + 6 + 8 = 16$$

и

$$\bar{\mu}_+(m_2) = \frac{\mu_+(m_2)}{4} = \frac{16}{4} = 4.$$

Замечание. На основе мер $\mu_1(c_{i,j})$, $\mu_2(c_{i,j})$, $\mu_3(c_{i,j})$ можно сконструировать меры, отличные от рассмотренных в пп. 6.1–6.3 и основанные на использовании принципа гарантированного результата [16]. Например, на основе меры $\mu_2(c_{i,j})$ можно построить меру

$$\mu_2(m_i) = \max_j \mu_2(c_{i,j}) = h(m_i), \ j \in [1:n_i]. \quad (6.9)$$

Эта мера имеет смысл максимальной высоты выходных понятий в модуле m_i, т.е. представляет собой высоту ЯПФ этого модуля. Содержательно мера $\mu_3(m_i)$ означает, что более сложным тот модуль, который содержит понятие большей высоты.

С нашей точки зрения, мера (6.9) менее содержательна, чем меры (6.3), (6.4), поскольку может приводить к одинаковым оценкам сложности двух модулей, первый из которых содержит только одно выходное понятие высоты h, а второй — множество выходных понятий, максимальная высота которых также равна h. Интуитивно равная оценка сложности таких модулей представляется неверной. Поэтому оценка (6.9) и аналогичные ей оценки далее не рассматриваются ⇒

7. Прочие меры сложности модулей

7.1. Мера сложности $\mu_4(m_i)$ представляет собой взвешенную сумму количеств входных и выходных понятий модуля m_i, т.е. взвешенное суммарное количество понятий в наборах: $\bar{C}_i$, C_i:

$\mu_4(m_i) = \mu_4(\lambda_i, m_i) = \lambda_i \bar{n}_i + n_i.$ (7.1)

Здесь $\lambda_i \in [0,1]$ — множитель, определяющий относительный вес входных и выходных понятий.

Аналогично мере $\mu_1(c_{i,j})$ (см. п. 5.1), мера $\mu_4(m_i)$ является двухкритериальной и представляет собой аддитивную свёртку величин $\bar{n}_i$, n_i. Содержательно мера (7.1) означает, что модуль, который оперирует большим количеством понятий, является, с нашей точки зрения, более сложным.

Очевидно, что при любом $\lambda_i \in [0,1]$ мера $\mu_4(m_i)$ не зависит от контекста: $\mu_4(m_i)=\mu_4^K(m_i)=$ $=\mu_4^T(m_i)$. Таким образом, имеем:

Утверждение 7.1. Мера $\mu_4(m_i)$ является контекстно-независимой $\Rightarrow$

В качестве примера рассмотрим модуль m_1, граф семантической сети которого представлен на рис. 3.1. Легко видеть, что для этого модуля $\mu_4(1,m_1)=7$, а $\mu_4(0,m_1)=4$.

7.2. Мера сложности $\mu_5(m_i)$ является взвешенной суммой количеств внешних и внутренних ссылочных понятий, используемых в модуле m_i:

$\mu_5(m_i) = \mu_5(\lambda_i, m_i) = \lambda_i \bar{l}_i + l_i.$ (7.2)

Здесь аналогично мере $\mu_4(m_i)$, весовой множитель $\lambda_i \in [0,1]$, а мера $\mu_5(m_i)$ представляет собой аддитивную свёртку величин $\bar{l}_i$, l_i.

Содержательно мера (7.2) означает, что более сложным полагается модуль, в котором используется большее количество внутренних и внешних ссылочных понятий. Очевидно, что при любом $\lambda_i \in [0,1]$ мера $\mu_5(m_i)$ не зависит от контекста (т.е. $\mu_5(m_i)=\mu_5^K(m_i)=\mu_5^T(m_i)$) и справедливо:

Утверждение 7.2. Мера $\mu_5(m_i)$ является контекстно-независимой $\Rightarrow$

7.3. Мера сложности $\mu_6(m_i)$ — диаметр графа $G(m_i)$, соответствующего семантической сети модуля m_i:

$\mu_6(m_i) = d(m_i).$ (7.3)

Содержательно мера $\mu_6(m_i)$ характеризует размер графа $G(m_i)$ и предполагает большую сложность модуля в случае, если этот размер больше. Очевидно, что мера $\mu_6(m_i)$ не зависит от контекста, т.е. $\mu_6(m_i) = \mu_6^K(m_i) =$ $= \mu_6^T(m_i)$ и справедливо:

Утверждение 7.3. Мера $\mu_6(m_i)$ является контекстно-независимой $\Rightarrow$

В качестве примера так же, как в п. 7.1, рассмотрим модуль m_1 (см. рис. 3.1). Легко видеть, что в этом случае $\mu_6(m_1)=2$.

7.4. Мера сложности $\mu_7(m_i)$ представляет собой рёберную плотность графа $G(m_i)$, соответствующего семантической сети модуля m_i:

$\mu_6(m_i) = b(m_i).$ (7.4)

Содержательно мера $\mu_7(m_i)$ характеризует близость графа $G(m_i)$ к клике и предполагает большую сложность модуля m_i в случае, когда этот граф ближе к полносвязному графу. Как и мера $\mu_6(m_i)$, мера $\mu_7(m_i)$, очевидно, не зависит от контекста, т. е. $\mu_7(m_i) = \mu_7^K(m_i) =$ $\mu_7^T(m_i)$ и справедливо:

Утверждение 7.4. Мера $\mu_7(m_i)$ является контекстно-независимой $\Rightarrow$

В качестве примера опять же рассмотрим модуль m_i (см. рис. 3.1). В этом случае

$$\mu_7(m_1) = \frac{2*10}{7*6} \approx 0{,}48.$$

7.5. Мультимера $\mu(m_i)$ — аддитивная свёртка мер $\mu_1(m_i)$ _ $\mu_7(m_i)$:

$$\mu(m_i) = \mu(\rho, m_i) = \sum_{j-1}^{7} \mu_i(m_i). \qquad (7.5)$$

Здесь для простоты записи опущены весовые множители в выражениях для $\mu_1(m_i)$, $\mu_4(m_i)$, $\mu_5(m_i)$, а вектор весовых множителей $\rho=(\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_7)$; $\rho_j \in [0,1]$, $j \in [1:7]$.

Из утверждений 6.1–6.3, 7.1–7.4 следует справедливость следующего утверждения:

Утверждение 7.5. Мультимера $\mu(m_i)$ является контекстно-зависимой и $\mu(m_i) \le \le \mu^K(m_i)$, $\mu^K(m_i) \le \mu^T(m_i) \Rightarrow$

Замечание 7.1. Каждая из рассмотренных мер сложности модулей может служить также мерой такого показателя дидактического качества учебного материала, как его усвояемость [17]. Действительно, большое значение всех мер сложности, рассмотренных в п. 6, а также мер $\mu_4(m_i)$, $\mu_6(m_i)$, $\mu_7(m_i)$, рассмотренные в данном разделе, может означать, что конструктор курса слишком много материала включил в эти модули. Большие же размеры модулей затрудняют усвоение соответствующего учебного материала. Отметим, что в соответствие с концепцией ТРЕК, размер каждого из модулей библиотеки базы знаний должен быть невелик.

Отдельного обсуждения с этой точки зрения заслуживает мера сложности $\mu_5(m_i)$. Конечно же, наличие в модулях внутренних и внешних ссылок, делает их более сложными. Однако, поскольку эти ссылки значительно затрудняют восприятие учебного материала субъектом обучения, наличие их значительного количества в большей степени свидетельствует о низкой усвояемости этого материала $\Rightarrow$

Резюмируя разделы 6, 7, приведём наши рекомендации по применению рассмотренных мер сложности модулей. Из соображений простоты интерпретации и минимума вычислительной сложности мы рекомендуем использовать меру $\mu_4(1,m_i)$ — взвешенную сумму количеств входных и выходных понятий данного модуля, меру $\mu_5(m_i)$ — взвешенное количество внешних и внутренних ссылочных понятий, используемых в данном модуле, а также меру $\mu_7(m_i)$ — рёберную плотность графа, соответствующего семантической сети данного модуля. Более строго говоря, мы рекомендуем использовать мультимеру $\mu(m_i)$ при $\rho_j = 0$, $j = 1,2,3,6$.

8. Меры сложности библиотек модулей, построенных на основе меры сложности модулей

8.1. Меры сложности $\mu_1(L)$, $\bar{\mu}_1(L)$ строятся на основе мер сложности модулей $\mu_1(\lambda,m_i)$, $\bar{\mu}_1(\lambda,m_i)$, соответственно, (см. п. 6.1). Поскольку эти меры являются контекстно-независимыми (см. утверждение 6.1), в качестве мер $\mu_1(L)$, $\bar{\mu}_1(L)$ можно использовать суммы

$$\mu_1(L) = \mu_1(\lambda,L) = \sum_{i-1}^{M} \mu_1(m_i)$$

$$\bar{\mu}_1(L) = \bar{\mu}_1(\lambda,L) = \sum_{i-1}^{M} \bar{\mu}_1(m_i). \qquad (8.1)$$

Таким образом, мера $\mu_1(L)$ представляет собой сумму количеств понятий, связанных в узком смысле с каждым из выходных понятий каждого из модулей библиотеки L, а мера $\bar{\mu}_1(L)$ — сумму усреднённых в пределах каждого из модулей количеств тех же понятий. Здесь и далее в этом разделе в качестве примера мы будем использовать библиотеку L, состоящую из модулей m_1, m_2 (см. рис. 3.1, 3.2).

Таким образом, последовательно имеем:
$\mu_1(1,c_{1,1})$=2, $\mu_1(1,c_{1,2})$=2, $\mu_1(1,c_{1,3})$=2, $\mu_1(1,c_{1,4})$=4;
$\mu_1(1,m_1)$=2+2+2+4=10, $\bar{\mu}_1(1,m_i)=\frac{1}{4}\,10$=2,5;
$\mu_1(1,m_2)$=4, $\bar{\mu}_1(1,m_2)$=2 (см. п. (6.1));
$\mu_1(1,L)=\mu_1(1,m_1)+\mu_1(1,m_2)$=10+4=14;
$\bar{\mu}_1(1,L)=\bar{\mu}_1(1,m_1)+\bar{\mu}_1(1,m_2)$=2,5+2=4,5.

На основе мер сложности модулей $\mu_1(m_i)$, $\bar{\mu}_1(m_i)$ можно предложить и другие меры сложности библиотеки L. Например, естественно использовать усреднение мер (8.1) по количеству модулей M:

$$\mu_1(L)=\mu_1(\lambda,L)=\frac{1}{M}\sum_{i-1}^{M} \mu_1(m_i); \qquad (8.2)$$

$$\bar{\mu}_1(L) = \bar{\mu}_1(\lambda,L) = \frac{1}{M}\sum_{i-1}^{M} \bar{\mu}_1(\lambda,m_i). \qquad (8.3)$$

8.2. Меры сложности $\mu_2(L)$, $\bar{\mu}_2(L)$ формируются на основе мер сложности модулей $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$, соответственно (см. п. 6.2). Поскольку меры $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$ являются контекстно-зависимыми (см. утверждение 6.2), возможны два метода формирования мер $\mu_2(L)$, $\bar{\mu}_2(L)$:

1. Построение мер $\mu_2(L)$, $\bar{\mu}_2(L)$ на основе непосредственно мер $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$, т.е. с использованием значений этих мер в контексте соответствующих модулей:

$$\mu_2(L)=\sum_{i-1}^{M} \mu_2(m_i);\ \bar{\mu}_2(L)=\sum_{i-1}^{M} \bar{\mu}_2(m_i). \qquad (8.4)$$

2. Построение мер $\mu_2(L)$, $\bar{\mu}_2(L)$ на основе мер $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$ в контексте всей библиотеки, т.е. на основе мер $\mu_2{}^K(m_i)$, $\bar{\mu}_2{}^K(m_i)$:

$$\mu_2{}^K(L)=\sum_{i-1}^{M} \mu_2{}^K(m_i);\ \bar{\mu}_2{}^K(L)=\sum_{i-1}^{M} \bar{\mu}_2{}^K(m_i). \qquad (8.5)$$

На основе мер $\mu_2(m_i)$, $\bar{\mu}_2(m_i)$, $\mu_2{}^K(m_i)$, $\bar{\mu}_2{}^K(m_i)$ можно также предложить меры, аналогичные мерам (8.2), (8.3).

Мера $\mu_2(L)$ представляет собой сумму высот входных и выходных понятий всех модулей библиотеки L в случае, когда каждая из этих высот определяется в контексте соответствующего модуля. Аналогично, мера $\bar{\mu}_2{}^K(L)$ есть сумма высот тех же понятий, усреднённых в пределах каждого из модулей библиотеки L. Мера $\mu_2{}^K(m_i)$ есть не что иное, как сумма высот входных и выходных понятий всех модулей библиотеки L в случае, когда каждая из этих высот определяется в контексте библиотеки L. Аналогично, мера $\bar{\mu}_2{}^K(m_i)$ представляет собой сумму высот этих понятий, усреднённых в пределах каждого из модулей библиотеки L.

К примеру, для библиотеки $L = m_1 \bigcup m_2$ имеем следующие значения рассматриваемых мер:

1. Меры $\mu_2(L)$, $\bar{\mu}_2(L)$ (см. рис. 3.1, 3.2):
$\mu_2(m_1)$=17, $\bar{\mu}_2(m_1)$≈2,43 (см. п. 6.1);
$\mu_2(\bar{c}_{2,1})$=$\mu_2(\bar{c}_{2,2})$=1, $\mu_2(c_{2,1})$=2, $\mu_2(c_{2,2})$=3;
$\mu_2(m_2)$=(1+1)+(2+3)=7, $\bar{\mu}_2(m_2)=\frac{7}{4}$≈1,75;
$\mu_2(L)$=17+7=24, $\bar{\mu}_2(L)$≈2,43+1,75=4,18.

2. Меры $\mu_2{}^K(L)$, $\bar{\mu}_2{}^K(L)$ (см. рис. 3.3 (а)):
$\mu_2{}^K(\bar{c}_{1,1})$=1, $\mu_2{}^K(\bar{c}_{1,2})$=2, $\mu_2{}^K(\bar{c}_{1,3})$=3,
$\mu_2{}^K(c_{1,1})$=4, $\mu_2{}^K(c_{1,2})$=5, $\mu_2{}^K(c_{1,3})$=6,
$\mu_2{}^K(c_{1,4})$=7;
$\mu_2{}^K(m_i)$=1+2+3+4+5+6+7=28, $\bar{\mu}_2{}^K(m_i)=\frac{28}{7}$=4;
$\mu_2{}^K(m_2)$=$\mu_2(m_2)$=7, $\bar{\mu}_2{}^K(m_2)$=$\bar{\mu}_2(m_2)$=1,75;
$\mu_2{}^K(L)$=28+7=35, $\bar{\mu}_2{}^K(L)$=4+1,75=5,75.

8.3. Меры сложности $\mu_3(L)$, $\bar{\mu}_3(L)$ основаны на мерах сложности $\mu_3(m_i)$, $\bar{\mu}_3(m_i)$ (см. п. 6.3). Поскольку меры $\mu_3(m_i)$, $\bar{\mu}_3(m_i)$ являются контекстно-зависимыми (см. утверждение 6.3), аналогично п. 8.2 возможны два метода формирования мер $\mu_3(L)$, $\bar{\mu}_3(L)$:

$$\mu_3(L)=\sum_{i-1}^{M} \mu_3(m_i),\ \bar{\mu}_3(L)=\sum_{i-1}^{M} \bar{\mu}_3(m_i); \qquad (8.6)$$

$$\mu_3{}^K(L)=\sum_{i-1}^{M} \mu_3{}^K(m_i),\ \bar{\mu}_3{}^K(L)=\sum_{i-1}^{M} \bar{\mu}_3{}^K(m_i). \qquad (8.7)$$

На основе мер $\mu_3(m_i)$, $\bar{\mu}_3(m_i)$, $\mu_3{}^K(m_i)$, $\bar{\mu}_3{}^K(m_i)$ можно также предложить меры, аналогичные мерам (8.2), (8.3).

Мера $\mu_3(L)$ есть сумма количеств понятий, информационно связанных в широком смысле с каждым из понятий всех модулей библиотеки L в случае, когда каждая из этих сумм определяется в контексте соответствующего модуля. Аналогично, мера $\bar{\mu}_3(L)$ — это сумма количеств тех же понятий, усреднённых в пределах каждого из модулей библиотеки L. Мера $\mu_3{}^K(m_i)$ представляет собой сумму количеств понятий, информационно связанных в широком смысле с каждым из понятий всех модулей библиотеки L в случае, когда каждая из этих сумм определяется в контексте библиотеки L. Аналогично, мера $\bar{\mu}_3{}^K(m_i)$ является суммой количеств этих понятий, усреднённых в пределах каждого из модулей библиотеки L.

Для библиотеки $L = m_1 \bigcup m_2$ имеем следующие значения рассматриваемых мер:

1. Меры $\mu_3(L)$, $\bar{\mu}_3(L)$ (см. рис. 3.1, 3.2):
$\mu_3(c_{1,1})=2$, $\mu_3(c_{1,2})=4$, $\mu_3(c_{1,3})=5$, $\mu_3(c_{1,4})=6$;
$\mu_3(m_1)=2+4+5+6=17$, $\bar{\mu}_3(m_1)=\frac{17}{4}=4{,}25$;
$\mu_3(m_2)=6$, $\bar{\mu}_3(m_2)=3$ (см. п. 6.3);
$\mu_3(L)=17+6=23$, $\bar{\mu}_3(L)=4{,}25+3=7{,}25$.

2. Меры $\mu_3{}^K(L)$, $\bar{\mu}_3{}^K(L)$ (см. рис. 3.3 (а)):
$\mu_3{}^K(\bar{c}_{1,2})=2$, $\mu_3{}^K(\bar{c}_{1,3})=3$, $\mu_3{}^K(c_{1,1})=3$,
$\mu_3{}^K(c_{1,2})=5$, $\mu_3{}^K(c_{1,3})=6$, $\mu_3{}^K(c_{1,4})=7$;
$\mu_3{}^K(m_1)=2+3+3+5+6+7=24$, $\bar{\mu}_3{}^K(m_1)=\frac{24}{4}=6$;
$\mu_3{}^K(m_2)=6$, $\bar{\mu}_3{}^K(m_2)=3$ (см. п. 6.3);
$\mu_3{}^K(L)=24+6=30$, $\bar{\mu}_3{}^K(L)=6+3=9$.

8.4. Меры сложности $\mu_+(L)$, $\bar{\mu}_+(L)$ формируются на основе контекстно-зависимых мультимер $\mu_+(m_i)$, $\bar{\mu}_+(m_i)$ (см. п. 6.4) и аналогично пп. 8.2, 8.3 равны:

$$\mu_+(L)=\sum_{i-1}^{M}\mu_+(m_i),\ \bar{\mu}_+(L)=\sum_{i-1}^{M}\bar{\mu}_+(m_i), \tag{8.8}$$

$$\mu_+{}^K(L)=\sum_{i-1}^{M}\mu_+{}^K(m_i),\ \bar{\mu}_+{}^K(L)=\sum_{i-1}^{M}\bar{\mu}_+{}^K(m_i), \tag{8.9}$$

На основе мер $\mu_+(m_i)$, $\bar{\mu}_+(m_i)$; $\mu_+{}^K(m_i)$, $\bar{\mu}_+{}^K(m_i)$ можно также предложить меры, аналогичные мерам (8.2), (8.3).

Таким образом, мера $\mu_+(L)$ есть сумма значений аддитивной свёртки мер $\mu_1(\lambda,c_{i,j})$, $\mu_2(c_{i,j})$, $\mu_3(c_{i,j})$ для всех понятий всех модулей библиотеки L в случае, когда каждая из этих свёрток определяется в контексте соответствующего модуля. Аналогично, мера $\bar{\mu}_+(L)$ — это сумма значений аддитивной свёртки тех же мер, усреднённых в пределах каждого из модулей библиотеки L. Мера $\mu_+{}^K(m_i)$ представляет собой сумму значений аддитивной свёртки мер $\mu_1(\lambda,c_{i,j})$, $\mu_2(c_{i,j})$, $\mu_3(c_{i,j})$ для всех понятий всех модулей библиотеки L в случае, когда каждая из этих свёрток определяется в контексте библиотеки L. Аналогично, мера $\bar{\mu}_+{}^K(m_i)$ является суммой значений аддитивной свёртки тех же мер, усреднённых в пределах каждого из модулей библиотеки L.

8.5. Меры сложности $\mu_4(L)$, $\bar{\mu}_4(L)$ строятся на основе контекстно-независимой меры $\mu_4(\lambda_i,m_i)$ (см. утверждение 7.1) и поэтому аналогично мерам $\mu_1(L)$, $\bar{\mu}_1(L)$ равны

$$\mu_4(L)=\mu_4(\lambda,L)=\sum_{i-1}^{M}\mu_4(\lambda_i,m_i),$$

$$\bar{\mu}_4(L)=\bar{\mu}_4(\lambda,L)=\frac{1}{M}\mu_4(\lambda,L), \tag{8.10}$$

где $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_M)$.

Таким образом, мера μ_4(L) представляет собой сумму взвешенных сумм количеств входных и выходных понятий всех модулей библиотеки L, а мера $\bar{\mu}_4$(L) — ту же сумму, усреднённую по количеству модулей M в библиотеке L.

Используя в качестве примера библиотеку, $L=m_1\bigcup m_2$, при $\lambda=(1,1)$ получим следующие значения мер $\mu_4(L)$, $\bar{\mu}_4(L)$:

$\mu_4(1,m_1)=7$, $\mu_4(1,m_1)=4$;

$\mu_4(L)=7+4=11$, $\bar{\mu}_4(L)=\frac{11}{2}=5{,}5$.

8.6. Меры сложности $\mu_5(L)$, $\bar{\mu}_5(L)$ строятся на основе контекстно-независимой меры $\mu_5(\lambda_i,m_i)$ (см. утверждение 7.2) и поэтому аналогично мерам $\mu_4(L)$, $\bar{\mu}_4(L)$ равны

$$\mu_5(L)=\mu_5(\lambda,L)=\sum_{i-1}^{M}\mu_5(\lambda_i,m_i),$$

$$\bar{\mu}_4(L)=\bar{\mu}_4(\lambda,L)=\frac{1}{M}\mu_5(\lambda,L), \qquad (8.11)$$

где $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_M)$.

То есть мера $\mu_5(L)$ является суммой взвешенных сумм количеств внешних и внутренних ссылочных понятий, используемых во всех модулях библиотеки L, а мера $\bar{\mu}_5(L)$ — той же суммой, но усреднённой по количеству М модулей в библиотеке L.

8.7. Меры сложности $\mu_6(L)$, $\bar{\mu}_6(L)$ базируются на контекстно-независимой мере сложности модуля $\mu_6(m_i)$ (см. утверждение 7.3). Аналогично мерам $\mu_5(L)$, $\bar{\mu}_5(L)$ имеем

$$\mu_6(L)=\sum_{i-1}^{M}\mu_6(m_i),\ \bar{\mu}_6(L)=\frac{1}{M}\mu_6(L). \qquad (8.12)$$

Мера $\mu_6(L)$ представляет собой сумму диаметров всех модулей библиотеки L, а мера $\bar{\mu}_6(L)$ — ту же сумму, но усреднённую по количеству модулей в библиотеке L.

Меры $\mu_6(m_i)$, $\bar{\mu}_6(L)$ для библиотеки $L=$ $=m_1\bigcup m_2$ имеют следующие значения:

$\mu_6(m_1)=3$, $\mu_6(m_2)=2$;

$\mu_6(L)=3+2=5$, $\bar{\mu}_6(L)=\frac{5}{2}=2{,}5$.

8.8. Меры сложности $\mu_7(L)$, $\bar{\mu}_7(L)$ формируются на основе контекстно-независимой меры сложности модуля $\mu_7(m_i)$ (см. утверждение 7.4). Подобно мерам $\mu_6(L)$, $\bar{\mu}_6(L)$ имеем

$$\mu_7(L)=\sum_{i-1}^{M}\mu_7(m_i),\ \bar{\mu}_7(L)=\frac{1}{M}\mu_7(L). \qquad (8.13)$$

Мера $\mu_7(L)$ — это сумма рёберных плотностей всех модулей библиотеки L, а мера $\bar{\mu}_7(L)$ — та же сумма, но усреднённая по количеству модулей в библиотеке L.

Для библиотеки $L = m_1\bigcup m_2$ меры $\mu_7(L)$, $\bar{\mu}_7(L)$ имеют следующие значения:

$\mu_7(m_i)\approx 0{,}48$ (см. п. 7.4), $\mu_7(m_2)=\frac{2*4}{4*3}\approx 0{,}67$;

$\mu_7(L)\approx 0{,}48+0{,}67=1{,}15$, $\bar{\mu}_7(L)\approx\frac{1{,}15}{2}\approx 0{,}58$.

8.9. Меры сложности $\mu_{++}(L)$, $\bar{\mu}_{++}(L)$ формируются на основе контекстно-зависимой мультимеры $\mu(m_i)$ (см. п. 7.5) и равны

$$\mu_{++}(L)=\mu_{++}(\rho,L)=\sum_{i-1}^{M}\mu(m_i),$$

$$\bar{\mu}_{++}(L)=\bar{\mu}_{++}(\rho,L)=\frac{1}{M}\mu_{++}(L). \qquad (8.14)$$

Мера $\mu_{++}(L)$ есть не что иное, как сумма аддитивных свёрток мер $\mu_1(m_i)$ — $\mu_7(m_i)$ всех модулей библиотеки L, а мера $\bar{\mu}_{++}(L)$ — та же сумма свёрток, но усреднённая по количеству модулей в библиотеке L.

9. Прочие меры сложности библиотек модулей

Меры сложности библиотеки L, рассматриваемые в данном разделе, в основном сконструированы на основе мер сложности информационно-логического графа библиотеки $G(L)$ — графа информационных связей модулей m_i, $i\in[1:M]$..

9.1. Меры сложности $\mu_8(L)$, $\bar{\mu}_8(L)$ строятся на основе взвешенной суммы количества вершин и кратностей дуг в графе $G(L)$:

$$\mu_8(L)=\mu_8(\lambda,L)=M+\lambda\sum_{i,j}N_{i,j},\ i,j\in[1:M],\ \mathrm{i}\neq \mathrm{j}; \qquad (9.1)$$

$$\bar{\mu}_8(L)=\bar{\mu}_8(\lambda,L)=\frac{1}{M}\mu_8(L). \qquad (9.2)$$

Здесь $\lambda\in[0,1]$ — множитель, определяющий относительный вес количества вершин и кратностей дуг; $V_{i,j}=0$, если модули m_i, m_j не имеют информационных связей.

В качестве примера в данном и последующих пунктах рассматривается библиотека

$L = \bigcup\limits_{1-[1-4]} m_i$, ЯПФ графа информационных связей модулей которой $G(L)$ представлена на рис. 9.1. В этом графе $V_{1,3} = 3$, $V_{2,3} = 2$, $V_{2,4} = 2$, $V_{3,4}=4$.

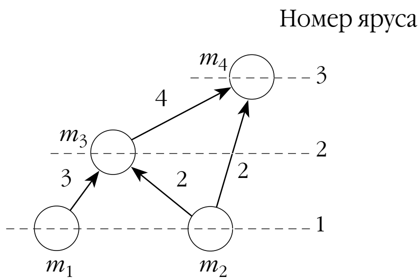

Рис. 9.1. Пример графа информационных связей модулей $G(L)$ (в форме ЯПФ).

В предположении, что $\lambda = 1$, для библиотеки $L = \bigcup\limits_{1-[1-4]} m_i$, имеем:

$\mu_8(1,L)=4+(3+2+2+4) = 15$;

$\bar{\mu}_8(1,L)=\frac{15}{4}=3{,}75$

9.2. Меры сложности $\mu_9(L)$, $\bar{\mu}_9(L)$ представляют собой высоту и усреднённую высоту графа $G(L)$, соответственно:

$$\mu_9(L)=\mathrm{h}(L),\ \bar{\mu}_9(L)=\frac{1}{M}\mu_9(L). \qquad (9.3)$$

Для библиотеки $L = \bigcup\limits_{i-[1-4]} m_i$ имеем:

$\mu_9(L)=3$; $\bar{\mu}_9(L)=\frac{3}{4}=0{,}75$

9.3. Меры сложности $\mu_{10}(L)$, $\bar{\mu}_{10}(L)$ — рёберная плотность и усреднённая рёберная плотность графа $G(L)$, соответственно:

$$\mu_{10}(L)=\mathrm{h}(L),\ \bar{\mu}_{10}(L)=\frac{1}{M}\mu_{10}(L). \qquad (9.4)$$

Для библиотеки $L = \bigcup\limits_{i-[1-4]} m_i$ имеем:

$\mu_{10}(L)=\frac{2*4}{4*3}\approx 0{,}67$; $\bar{\mu}_{10}(L)\approx\frac{0{,}67}{4}\approx 0{,}17$;

9.4. Меры сложности $\mu_{11}(L)$, $\bar{\mu}_{11}(L)$ — общее количеств j контуров в $G(L)$ графе и их усреднённое количество

$$\mu_{11}(L)=\mathrm{e}(L),\ \bar{\mu}_{11}(L)=\frac{1}{M}\mu_{11}(L). \qquad (9.5)$$

9.5. Меры сложности $\mu_{12}(L)$, $\bar{\mu}_{12}(L)$ представляют собой общее количество кратных понятий в библиотеке L и то же количество, но усреднённое по количеству модулей в библиотеке, соответственно:

$$\mu_{12}(L)=\sum_{i,j}(K_{i,j}-1),\ i\in[1:M],\ j\in[1:n_i]; \qquad (9.6)$$

$$\bar{\mu}_{12}(L)=\frac{1}{M}\mu_{12}(L). \qquad (9.7)$$

Отметим, что в каждой из сумм (9.6) величина $K_{i,j}-1= 0$, если понятие $C_{i,j}$ имеет кратность, равную единице, т.е. ни разу не повторено в библиотеке L.

9.6. Мультимеры $\mu(L)$, $\bar{\mu}(L)$ — аддитивная свёртка мер $\mu_1(L)$ — $\mu_{12}(L)$ и мер $\bar{\mu}_1(L)$, $\bar{\mu}_{12}(L)$ соответственно:

$$\mu(L)=\mu(\rho L)=\sum_{j-1}^{12}\mu_i(L);$$

$$\bar{\mu}(\rho,L)=\frac{1}{M}\ \mu(\rho,L). \qquad (9.8)$$

Здесь для простоты записи опущены весовые множители в выражениях для мер $\mu_1(L)$, $\mu_4(L)$, $\mu_5(L)$, $\mu_8(L)$, а также для мер $\bar{\mu}_1(L)$, $\bar{\mu}_4(L)$, $\bar{\mu}_5(L)$, $\bar{\mu}_8(L)$; вектор весовых множителей $\rho=(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_{12})$; $\rho_j\in[0,1]$, $j\in[1:12]$.

Замечание 9.1. Аналогично мерам сложности модулей, каждая из рассмотренных мер сложности библиотеки может служить также мерой его усвояемости (см. замечание 7.1). Особенно естественно использовать в качестве такого критерия меры $\mu_5(L)$, $\mu_5(L)$, $\mu_{11}(L)$, $\mu_{11}(L)$. Использование в этом качестве мер $\mu_5(L)$, $\mu_5(L)$ мы обсуждали в замечании 7.1. Основания для использования в качестве критерия усвояемости мер $\mu_{11}(L)$, $\mu_{11}(L)$ аналогичны: контуры значительно затрудняют восприятие учебного материала субъектом обучения, и наличие их значительного количества приводит к низкой усвояемости этого материала. Отдельного обсуждения заслуживают также меры $\mu_{12}(L)$, $\mu_{12}(L)$. Кроме мер сложности библиотеки L, эти меры могут служить мерой гибкости (адаптивности) этой библиотеки. Действительно, большие значения этих мер говорят о большом количестве кратных понятий в библиотеке, а значит, и о большом количестве дублирующих модулей. Именно такие модули являются основой для построения индивидуальных учебных курсов ⇒

В заключение разделов 8, 9 приведём рекомендации по применению рассмотренных мер сложности библиотеки. Из соображений простоты интерпретации и минимума вычислительной сложности рекомендуется использовать меры $\mu_4(1,L)$, $\mu_5(L)$, $\mu_7(L)$, $\mu_8(L)$, $\mu_{10}(L)$, $\mu_{11}(L)$, $\mu_{12}(L)$ или те же, но усреднённые меры $\mu_4(1,L)$, $\mu_5(m_i)$, $\mu_7(L)$, $\mu_8(L)$, $\mu_{10}(L)$, $\mu_{11}(L)$, $\mu_{12}(L)$. То есть рекомендуется использовать следующие меры:

— меры на основе количеств входных и выходных понятий модулей библиотеки (меры $\mu_4(1,L)$, $\mu_4(1,L)$;

— меры на основе количеств внешних и внутренних ссылочных понятий тех же модулей (меры $\mu_5(L)$, $\mu_5(m_i)$;

— меры на основе рёберных плотностей графов $G(m_i)$ (меры $\mu_7(L)$, $\mu_7(L)$;

— меры на основе количества вершин и кратностей дуг в графе $G(L)$ (меры $\mu_8(L)$, $\mu_8(L)$;

— меры на основе рёберной плотности графа $G(L)$ (меры $\mu_{10}(L)$, $\mu_{10}(L)$;

— меры на основе количества кратных понятий в библиотеке L (меры $\mu_{12}(L)$, $\mu_{12}(L)$.

Другими словами, рекомендуется использовать мультимеры $\mu(L)$, $\mu(L)$ при ρ=0, j=1,2,3,6,9.

10. Меры сложности учебных курсов

В качестве мер сложности учебного курса T можно использовать меры, аналогичные мерам $\mu_1(L)$ — $\mu_{11}(L)$ библиотеки L, а также меры, аналогичные мерам $\mu_1(L)$ — $\mu_{11}(L)$. Поскольку корректно построенный учебный курс не должен содержать кратных понятий, меры, аналогичные мерам $\mu_{12}(L)$, $\mu_{12}(L)$ в этом списке отсутствуют.

Таким образом, в качестве мер сложности учебного курса T можно использовать меры $\mu_1(T)$ — $\mu_{11}(T)$ и меры $\mu_1(T)$ — $\mu_{11}(T)$. Можно использовать также мультимеры, аналогичные мультмерам (9.8):

$$\mu(T)= \mu(\rho,T)=\sum_{j-1}^{11}\mu_i(T);$$

$$\mu(\rho,T)=\frac{1}{M}\ \mu(\rho,T). \qquad (10.1)$$

Здесь для простоты записи опущены весовые множители в выражениях для мер $\mu_1(T)$, $\mu_4(T)$, $\mu_5(T)$, $\mu_8(T)$ а также для мер $\mu_1(T)$, $\mu_4(T)$, $\mu_5(T)$, $\mu_8(T)$; вектор весовых множителей $\rho=(\rho_1,\rho_2,...,\rho_{11})$; $\rho_j\in[0,1]$, $j\in[1:11]$.

Непосредственно использовать введённые меры может быть методически ошибочным. Дело в том, что, очевидно, сложность учебного курса зависит ещё и от количества времени, которое выделено на его изучение. Обозначим это время $t(T)$, и наряду с введёнными мерами будем использовать их нормированные варианты:

$$\mu_j^+(T) = \frac{\mu_j(T)}{t(T)},\ j \in [1:11]; \qquad (10.2)$$

$$\bar{\mu}_j^+(T) = \frac{\bar{\mu}_j(T)}{t(T)}; \qquad (10.2)$$

$$\mu^+(\rho, T) = \frac{\mu(\rho, T)}{t(T)}, \qquad (10.2)$$

$$\bar{\mu}^+(\rho, T) = \frac{\bar{\mu}(\rho, T)}{t(T)}. \qquad (10.2)$$

Для введённых мер сложности учебного курса остаётся справедливым замечание 9.1, а также рекомендации по их применению, изложенные в конце п. 9.

11. Заключение

Некоторые из мер сложности, предложенные в статье, могут быть использованы в качестве мер усвояемости учебного материала и мер его адаптивности. Это обстоятельство позволяет формально ставить задачу оценки качества учебных материалов, как трёхкритериальную задачу (с критериями: сложность, усвояемость, адаптивность). Результаты работы позволяют значения всех трёх критериев качества вычислить автоматически, только на основе анализа семантической сети соответствующего учебного материала.

Все меры, рассмотренные в статье, построены только на основе соответствующей семантической сети. Наряду с этим можно предложить и другие меры, например: меры, использующие объёмы модулей, библиотек и учебных курсов; меры использующие метаданные тех же единиц контента и др. С нашей точки зрения, меры такого сорта менее содержательны и объективны, чем меры на основе метрик семантической сети.

Для многих мер, предложенных в статье, можно предложить их варианты, построенные на основе шенноновской меры информации.

Литература

1. Official ADL SCORM overview // http://www.adlnet.gov/scorm

2. *Норенков И.П.* Технология разделяемых единиц контента для создания и сопровождения информационно-образовательных сред // Информационные технологии, 2003, № 8.

3. *Белоусова Л.И., Колгатин А.Г., Колгатина Л.С.* Принципы построения автоматизированной системы педагогической диагностики // УСиМ, 2007, № 2. С. 75–81.

4. Креативная педагогика: методология, теория, практика /под ред. Ю.Г. Круглова. М.: МГОПУ им. М.А. Шолохова, изд. центр «Альфа», 2002. 240 с.

5. *Карпенко А.П., Соколов Н.К.* Контроль понятийных знаний субъекта обучения с помощью когнитивных карт //Управление качеством инженерного образования и инновационные образовательные технологии. Сборник докладов Международной научно-методической конференции 28–30 октября 2008 г. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. Ч. 2. С. 55–57.

6. Программный продукт «Сеть научных понятий» // http://www.websamba.com/supertest

7. *Добряков А.А., Милова В.М.* Экспертно-аналитический метод оценки качества образо-

вательных систем на основе нечётко-множественного подхода // Качество. Инновации. Образование. 2007, № 1, с. 36–41.

8. *Галямова Е.В.* Оценка качества электронного учебного материала // Управление качеством инженерного образования и инновационные образовательные технологии. Сборник докладов Международной научно-методической конференции 28–30 октября 2008 г. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. Ч. 2. С. 29–34.

9. *Усачев Ю.Е.* Проектирование интеллектуального учебника // http://www.e-joe.ru/sod/00/4_00/us.html

10. *Рабинович П.Д.* Исследование и разработка моделей, алгоритмов и программного обеспечения в компьютерных обучающих системах. Автореферат диссертации на соискание учёной степени кандидата технических наук. Москва, 2005.

11. *Норенков И.П., Уваров М.Ю.* База и генератор образовательных ресурсов // Информационные технологии. 2005. № 9. С. 60–65.

12. *Федотов И.Е.* Некоторые приёмы параллельного программирования: Учебное пособие. М.: Изд-во МГИРЭА (ТУ), 2008. 188 с.

13. *Евстигнеев В.А.* Применение теории графов в программировании. М.: Наука, 1985. 332 с.

14. *Ларичев О.И.* Теория и методы принятия решений, а также Хроника событий в Волшебных странах. М.: Университетская книга, Логос, 2006. 292 с.

15. *Карпенко А.П., Федорук В.Г.* Обзор программных систем многокритериальной оптимизации. Отечественные системы // Информационные технологии. 2008. № 1. С. 15–22.

16. *Вентцель Е.С.* Исследование операций: задачи, принципы, методология. М.: Дрофа, 2006. 206 с.

17. *Белоус В.В., Васильев Н.В., Карпенко А.П.* Вопросы регистрации электронных изданий // Управление качеством инженерного образования и инновационные образовательные технологии. Сборник докладов Международной научно-методической конференции 28–30 октября 2008 г. М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2008. Ч. 2. С. 45–50. 2002. 240 с.