Л.И. Лапушкина, *доцент кафедры прикладной математики СТАНКИНа.*
К.Н. Лунгу, *профессор кафедры дифференциальных уравнений МГОУ*

ПРЕЕМСТВЕННОСТЬ В ОБУЧЕНИИ ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ ШКОЛЬНИКОВ И СТУДЕНТОВ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ

Слова «кредит, ипотека, аренда, ставка банка, амортизационные расходы» стали общеупотребительными, они встречаются в газетах, звучат по радио и телевидению, фигурируют в рекламах. Между тем не все понимают, что в основе каждой из названных операций лежат школьные понятия процента, арифметической и геометрической прогрессии.

Чтобы студенты экономических специальностей легко усвоили такие дисциплины, как «Финансовые вычисления», «Деньги, кредит, банки», необходимо ещё в школе понимать сущность понятия «процент» и способ его вычисления. Важно также различать и понимать, чем отличаются простые проценты от сложных, как вычисляются те и другие проценты, какова их математическая модель, чем отличается прогрессия геометрическая от арифметической, как определяются их суммы.

Для ликвидации имеющихся пробелов в этом направлении можно организовать несколько повторительных и систематизирующих уроков по соответствующим темам. Основой для решения задач на проценты должны быть три вида задач: нахождение процента данного числа; нахождение числа по его процентам; нахождение процентного отношения двух чисел[1].

Понимание сущности объекта, явления, процесса и метода означает способность, умение выявлять их признаки и свойства, а также устанавливать их структурные, логические и причинно-следственные связи. Каждая педагогическая проблема, в том числе усвоение и понимание финансовой математики, решается системой соответствующих задач. Ниже приведём весьма сжатый набор типовых задач с экономическим содержанием, который используют авторы статьи в школьной практике.

Основные теоретические сведения, позволяющие решать задачи на проценты, за-

[1] См.: *Крамор В.С., Лунгу К.Н.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Ч. 1. От натуральных чисел и действий с ними до неравенств. М.: Аркти, 2001.

ключаются в нескольких определениях, которые необходимо усвоить через понимание. Эти сведения заключаются в следующем.

Процент — это число. 0,01: 1% = 0,01. Процентом чего-либо называется его сотая часть. Процентом числа A называется число $0{,}01A$. Обозначение $1\%\,(A) = 0{,}01\,A$. Найти p процентов числа A означает найти $0{,}01pA$. Обозначение $p\%(A) = 0{,}01pA$. Если p процентов неизвестного числа X равно b, то это число X находится из равенства $0{,}01pX = b$, т.е $X = 100\ b/p$. Процентным отношением чисел A и B (или B и A) называется отношение A/B (или B/A), выраженное в процентах, т.е. $\frac{A}{B}\cdot 100\%$ $\left(\text{или}\quad \frac{B}{A}\cdot 100\%\right)$.

Усвоить и закрепить эти простые понятия можно при помощи следующих примеров. При этом важно оперировать величиной $0{,}01p$, т.е процентами, а не величиной $p/100$, как рекомендуют многие учебники.

Пример 1. 1) Определить, в каких случаях товар стоит дешевле:

а) если снизить его цену два раза по 10% или один раз на 20%?

б) если сперва снизить цену на 15%, а затем новую цену повысить на 15%, или первоначальную цену оставить без изменения?

в) если сперва повысить цену на 25%, а затем новую цену снизить на 25%, или первоначальную цену оставить без изменения?

Пример 2. Цену товара повысили на 10%, затем новую цену повысили ещё на 15%, и, наконец, повысили новую цену ещё на 20%. На сколько процентов в итоге повысили первоначальную цену на товар?

Пример 3. Цена на данный товар в одном магазине равна 16 руб., а в другом — 25 руб. На сколько процентов цена на товар в первом магазине ниже, чем во втором, и на сколько процентов цена во втором магазине выше цены во втором?

Задачи на проценты из разных сфер деятельности и разного уровня сложности можно найти в следующих источниках[2].

Понимание процентов и действий с ними означает способность и умение видеть через установление связей между числами, фигурирующими в задаче и в её решении, выраженными в терминах «снижение, повышение цены, процент, исходная, промежуточная и конечная цены».

Далее можно переходить к задачам на вычисление долговременных процентов, предварительно описав соответствующие схемы их начисления.

Задача 1. Вкладчик положил в банк А рублей под p% годовых. Сколько денег будет у него на счету через n лет?

1. Начисление по схеме простых процентов

Схема простых процентов предполагает начисление только на первоначальную сумму A, независимо от срока давности вклада. Это означает, что по истечении одного года начисленные проценты составляют величи-

---

2 *Крамор В.С., Лунгу К.Н.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Часть 1. От натуральных чисел и действий с ними до неравенств. М.: Аркти, 2001; *Крамор В.С., Лунгу К.Н.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Часть 1. От неравенств до тригонометрических функций. М.: Аркти, 2001; *Крамор В.С., Лунгу К.Н.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Часть 3. От тригонометрических функций до интеграла. М.: Аркти, 2001.

ну $A\cdot\frac{p}{100}$ (руб.), а величина вклада станет равной $A_1 = A + A\cdot\frac{p}{100} = A\cdot(1+0.01p)$ (руб.). По прошествии второго года банк начислит p% от первоначального вклада A, а не от нового A_1. И так далее, через n лет величина вклада станет равной $A_n = A \cdot (1 + 0{,}01p \cdot n$ (руб.).

Таким образом, схема начисления простых процентов приводит к росту вклада по закону арифметической прогрессии: $A_n = A + n \cdot d$, $d = 0{,}01p \cdot A$, где d — разность прогрессии.

Примечание. На самом деле начисление по схеме простых процентов имеет место тогда, когда вкладчик по прошествии года снимает начисленные годовые проценты в размере d.

Задача 2. Определить начальную сумму A вклада в банк, чтобы, не трогая его, в конце каждого года снимать со счёта начисленными процентами определённую сумму B, если ставка банка равна p%.

Решение задачи основано на понимании структуры начисленной суммы в конце каждого года, что приводит к определению величины A из равенства $B = d = \frac{A\cdot p}{100}$, т.е. $A = \frac{100\cdot B}{p}$. Прежде чем действовать в этих условиях, необходимо «чувствовать» это число: например, при ставке банка в 5% вклад должен быть в 20 больше, чем желаемая снимаемая сумма.

Из решения этой задачи можно делать вывод: чтобы получить по начисленным процентам сумму, равную исходному вкладу, нужно ждать $100/p$ лет, в частности, при p = 5% срок окупаемости вклада равен 25 лет.

2. Начисление по схеме сложных (повышенных) процентов.

Эта схема означает, что по прошествии второго года банк начисляет р% имеющейся суммы. Если вкладчик не снимет начисленных процентов, то по прошествии двух лет новая сумма равна $A_2 = A \cdot (1 + 0{,}01p)^2$, а по прошествии n лет величина вклада станет равной $A_2 = A \cdot (1 + 0{,}01p)^n$, т.е. она возрастает в геометрической прогрессии со знаменателем $q = 1 + 0{,}01p$.

Задача 3. На сколько лет при схеме сложных процентов нужно положить в банк под p% некоторую сумму A, чтобы она стала равной B?

Решение уравнения $B = A \cdot (1 + 0{,}01p)^n$ относительно n требует логарифмирования этого равенства: $n = \frac{\lg\frac{B}{A}}{\lg(1+0{,}01p)} = \frac{\lg B - \lg A}{\lg q}$ (лет).

Отсюда видно, что число лет зависит от p и отношения B/A величин B и A. В частности, при ставке в 5% годовых удвоение вклада произойдёт за

$$n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} = \frac{0{,}3010}{0{,}0212} = 14{,}2$$ (лет), а точнее, за 15 лет, поскольку начисления производятся в конце года.

Задача 4. Какую начальную сумму A следует положить в банк под p%, чтобы при схеме сложных процентов через n лет новая сумма стала равной B?

Решение получается из равенства
$B = A \cdot (1 + 0{,}01p)^n$ и $A = B \cdot (1 + 0{,}01p)^{-n}$.

В частности, при ставке в 5% и n = 5 лет сумму в B=10 000 руб. можно получить, внося сумму $A = 10^4 \cdot (1 + 0{,}05)^{-5} = 7835$ (руб).

Важная финансовая операция — дисконтирование. Дисконтным множителем называется величина $d_n = \frac{1}{(1+0{,}01p)^n}$, указывающая на процент текущей стоимости будущей величины начисления.

В условиях предыдущего примера $d_5 = \frac{1}{(1+0{,}05)^5} = 0{,}7835$ означает, что первоначальный вклад в 7835 руб. составляет 78,35% от величины начисления через пять лет при банковской ставке 5% годовых.

Таким образом, дисконтирование выражает процедуру определения нынешней стоимости будущего платежа, позволяющий сравнивать величины платежей, осуществляемых в разные моменты времени.

К современным экономическим понятиям относится поток платежей и его стоимость. Под потоком платежей понимается постоянная сумма платежей, которая выплачивается за определённый промежуток времени (год, квартал, месяц).

Задача 5. Руководство фирмы решает вложить определённую сумму A (денежных единиц) в строительство данного объекта, который в течение ряда лет будет приносить ежегодный доход B (ден. ед.), выплачиваемый в конце года, причём $B<A$. Банковская ставка равна p% и она не меняется в течение всего этого срока времени. Определить, при каких условиях выгодно такое вложение.

Решение основано на сравнении с помощью операции дисконтирования сегодняшних затрат A с последующими ежегодными выплатами в сумме B (ден. ед.) в течение n лет.

Первый платёж равен $R_1 = d_1 B$, где $d_1 = (1+0{,}01p)^{-1}$ фирма получит его через год. Второй платёж, который фирма получит через два года, равен $R_2 = d_2 B$, причём $d_2 = (1+0{,}01p)^{-2}$. И так далее. Последний платёж, равный $R_n = d_n B$, где $d_n = (1+0{,}01p)^{-n}$, фирма получит через n лет.

Сумму $R = R_1+R_2+\ldots+R_n$ этих платежей можно вычислить по формуле для суммы геометрической прогрессии (разные задачи на геометрическую прогрессию также можно найти в[3]). После выполнения ряда действий с рациональными дробями искомая сумма принимает вид

$$R=R_1+R_2+\ldots+R_n=$$
$$= B\cdot\left((1+0{,}01p)^{-1} + (1+0{,}01p)^{-2} + \ldots +\right.$$
$$\left.= + \ (1+0{,}01p)^{-n}\right) = \frac{100B}{p}\left(1-(1+0{,}01p)^{-n}\right).$$

Заметим, что приведение исходного выражения к простому виду и тем более решение последующих неравенств требуют от учащихся определённых вычислительных навыков и умений выполнять знаково-символические преобразования.

Итак, фирме экономически выгодно заключить сделку при условии, R>A, т.е.
$$\frac{100B}{p}\left(1-(1+0{,}01p)^{-n}\right) > A \iff$$
$$\iff 1-(1+0{,}01p)^{-n} > \frac{Ap}{100B}.$$

[3] *Крамор В.С., Лунгу К.Н.* Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры. Часть 3. От тригонометрических функций до интеграла. М.: Аркти, 2001.

Дальнейшие простые выкладки приводят к неравенству

$$(1+0{,}01p)^n > \frac{100B}{100B-Ap} = 1+\frac{Ap}{100B-Ap}.$$

Отсюда можно получить сроки, при которых фирме будет выгодно заключить данную сделку:

$$n > \frac{\lg\left(1+\dfrac{Ap}{100B-Ap}\right)}{\lg(1+0{,}01p)}, \ \textit{при} \ 100B > Ap.$$

Выбор конкретных данных (числовых величин) позволяет понимать, какие связи и соотношения между вкладом A, отдачей B, процентом p и числу n лет являются приемлемыми для осуществления тех или иных бизнес-проектов.

Например, если $A = 100$; $p = 4$; $B = 10$, то последнее неравенство принимает вид $n > \dfrac{\lg 1{,}666}{\lg 1{,}04} = \dfrac{0{,}2201}{0{,}0170} = 12{,}95$. Это означает, что сделка выгодна только на срок не менее 13 лет.

Приведённые типы профессионально направленных прикладных задач с экономическим содержанием позволяют повысить мотивацию к учёбе будущих студентов-экономистов и легче адаптироваться к введению в вузе других экономических категорий, терминов, характеристик, параметров, критериев.

Поскольку в экономике рассматриваются, помимо банковских и денежных операций, задачи и проблемы регулирования производства, распределения, обеспечения, хранения и т.д., то целесообразно рассматривать задачи на проценты из других областей практики. Задачи совместного производства, коллективной деятельности, на пропорциональные части, движение и пр., включающие в их фабулах и постановках проценты и процентные отношения, будут весьма полезными для формирования вычислительной культуры, математического (логического, алгоритмического, абстрактного) и профессионального (экономического) мышления.