Константин Никитович Лунгу, *профессор кафедры дифференциальных уравнений Московского государственного открытого университета, кандидат физико-математических наук.*

Александр Константинович Лунгу, *программист*

НАГЛЯДНОСТЬ В ОБУЧЕНИИ МАТЕМАТИКЕ СТУДЕНТОВ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

В условиях постоянного повышения требований к качеству знаний проблема повышения эффективности обучения математике может быть решена посредством совершенствования процесса управления учебно-познавательной деятельностью. Различные аспекты управления деятельностью учения освещены в работах С.И. Архангельского, В.П. Беспалько, П.Я. Гальперина, А.М. Кушнира, Н.Ф. Талызиной, Г.И. Щукиной, В.А. Якунина и других учёных.

При обучении математике существенную роль в управлении деятельностью обучающихся играет наглядность, поскольку она способствует реализации основного принципа доступности, а также успешности формирования понятий, методов, приёмов, поддержанию у них интереса к математике, приводит к более высокому уровню развития математической культуры, математического языка, логического мышления, обоснованности суждений.

Процесс переработки учебного материала, представленного в вербальной форме, является преимущественно одноканальным, трудно программируемым для выполнения мыслительных операций и понимания (эффективность усвоения вербальной информации не превышает 30%). С другой стороны, исследователями установлено, что около 90% всех сведений, получаемых человеком об окружающем мире, он получает с помощью зрения, 9% — с помощью слуха и лишь 1% — через посредство остальных органов чувств (Т.А. Ильина; [1], с. 211). Наилучшее восприятие обеспечивает сочетание изображения со словесной информацией («слово — наглядность»): при зрительном восприятии воспринимается сразу множество деталей, а слово помогает выделить для осмысления главное.

Психологи считают, что для того чтобы правильно подобрать и использовать наглядность в обучении, необходимо определить действия обучаемых по отношению к средствам наглядности, а также действия, которые они должны будут выполнить, чтобы овладеть материалом сознательно.

Реализация личностно ориентированной системы математического образования возможна посредством организации «понимающего усвоения» математики и развития личности средствами математики на основе концепции наглядно-модельного обучения математике в вузе. Под понимающим усвоением мы подразумеваем: 1) постижение адекватного смысла математического материала; 2) установление существенных связей между математическими объектами, явлениями, процессами и методами; 3) целостность и системность усвоения математического содержания, включая его знаково-символическое представление; 4) направленность процесса обучения на приобретение личностного опыта применения математики в конкретных ситуациях как в учебной, так и в профессиональной деятельности.

В исследовании процесса творчества математиков Ж. Адамар выделял две группы, одна из которых характеризуется «геометрическим» мышлением, а другая — «символьным». Для первой группы характерно создание некоего внутреннего образа, интегрирующего и удерживающего все особенности изучаемого предмета. По мнению А.Д. Александрова, существенным достоинством геометрии является то, что она даёт наглядную опору логическому мышлению. Действия с абстрактными понятиями опосредуются действиями с геометрическими, видимыми объектами.

Применение моделирования и наглядности поднимает вопрос о соотношении между ними в обучении. Моделирование и наглядность используются с единой целью: выделение главного, существенного в изучаемых объектах и предметах. Только при использовании наглядности существенное выделяется в плане восприятия, а при использовании моделирования оно выделяется в действии, преобразующем объект.

В педагогике и психологии наглядность трактуют неоднозначно: как средство обучения и управления познавательной деятельностью, как принцип обучения и как метод обучения. В последнем случае наглядность отождествляется с наблюдением как методом познания. Наблюдение описывалось ещё в работах многих философов древности.

Ф. Бэкон, автор трактата «Новый Органон», считал, что «Чувства непогрешимы и составляют источник всякого знания. Наука есть результат опыта и состоит в применении рационального метода к чувственным данным. Индукция, анализ, сравнение, наблюдение, эксперимент суть главные условия рационального метода». По Бэкону, наблюдение — это метод познания, который должен сочетаться с методами анализа и сравнения.

Проблема наглядности была исследована и представлена в трудах И.Г. Песталоцци. Он исходил из того, что умственное развитие ребёнка вытекает из наблюдения над предметами, которые касаются внешних чувств, и считал необходимым вести обучение наблюдению через выделение исходных элементов (число, форма, слово), организующих это наблюдение. Если для Я.А. Коменского наблюдение (наглядность) служит способом накопления знаний об окружающем мире, то у И.Г. Песталоцци наглядность выступает как средство развития способностей и духовных сил.

Согласно К.Д. Ушинскому, наглядность — «это такое учение, которое строится не на отвлечённых представлениях и словах, а на конкретных образах, непосредственно воспринятых ребёнком». Процесс познания состоит из двух основных ступеней: 1) чувственное восприятие предметов и явлений внешнего мира; 2) абстрактное мышление. Сущность наглядного обучения он усматривает в том, чтобы с помощью наглядных пособий или самих реальных предметов содействовать:

— образованию чёткого и ясного представления о предметах и явлениях;

— выявлению связей между предметами и явлениями;

— образованию определённого обобщения.

Таким образом, решение проблемы наглядности классики педагогики сводят к решению вопроса: происходит ли или нет усвоение знаний в процессе наблюдения (восприятия). К тому же они считали, что свойство наглядности относится только к конкретному, а абстрактные понятия нельзя сделать наглядными.

В настоящее время «классического понимания наглядности как опоры на чувственный компонент восприятия, актуального разнообразия её видов недостаточно для реализации процесса обучения математике. Специфика внутренней структуры самих математических объектов и знаково-символической деятельности по их усвоению, усиливающаяся математизация наук (что непременно находит своё отражение в изменяющихся программах вузовского математического образования) требуют нового взгляда на принцип наглядности, более пристального и эффективного использования в его реализации достижений психологии и физиологии человека» ([1], с. 209).

Современный подход к наглядности в обучении математике требует использования новых средств более глубокого по сравнению с чувственными рационального уровня отражения, представляющими в чувственно конкретной форме моделирование сущности математических объектов и призванными выступать рычагами управления познавательной деятельностью студентов и средством профессионализации математической подготовки будущего специалиста.

А.Н. Леонтьев считал наглядность как условие **понимания** в обучении, поэтому при выборе средств наглядности важно исходить из психологической роли, которую эти средства должны выполнять в усвоении через понимание. В соответствии с этим он выделяет две основные функции наглядности: а) расширение чувственного опыта; б) раскрытие сущности изучаемых процессов и явлений.

Адекватную формулу наглядности можно формулировать так: наглядность — это активность субъекта по созданию образа познаваемого объекта и **ясное понимание** этого образа. Психологический анализ понятия наглядности позволяет делать следующие выводы:

1) наглядность не есть какое-то свойство или качество реальных объектов. Наглядность есть свойство, особенность образов этих объектов, которые создаёт человек в процессе познания.

2) наглядность есть показатель простоты и **понятности** для данного человека того психического образа, который он создаёт в результате его непосредственного или опосредованного познания. Поэтому не наглядным может быть образ реально существующего предмета, если он нам непоня-

тен, и наоборот, вполне наглядным может быть образ предмета или явления, не существующего реально, т.е. фантастического объекта.

3) наглядность или не наглядность образа, возникающего у человека, зависит главным образом от особенностей самого человека, от уровня развития его познавательных способностей, от его интересов, наконец, от его потребности и желания создать для себя яркий, понятный образ этого объекта.

Подтверждением сказанного являются фигуры, приведённые ниже. На рис. 1 показана структура квадрата (фигуры), сторона которого состоит из трёх отрезков длиной a, b и c. Из наглядного рисунка можно делать вывод о структуре квадрата суммы трёх чисел как абстрактное знаково-символическое равенство: в предметном поле понимания «что есть, то и доказано» ([2], с. 39). Возведение в квадрат суммы большого числа и тем более бесконечного множества слагаемых является проблемой для студентов при изучении раздела «Ряды Фурье», где нужна формула для квадрата суммы ряда).

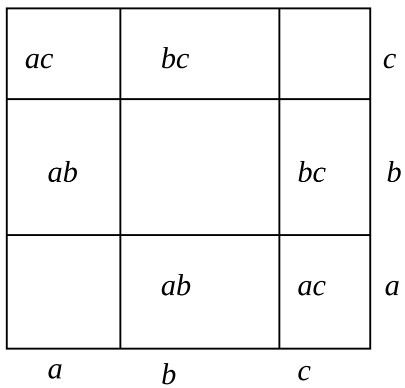

Рис. 1. $(a + b + c)^2$ = считай

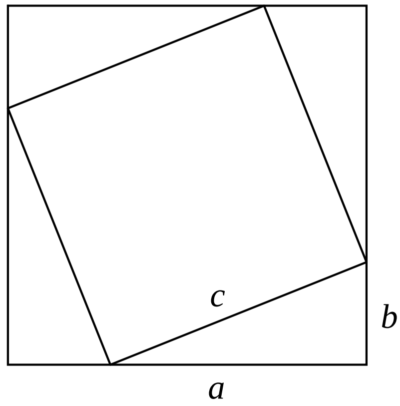

Рис.2. $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$ Û $a^2 + b^2 = c^2$

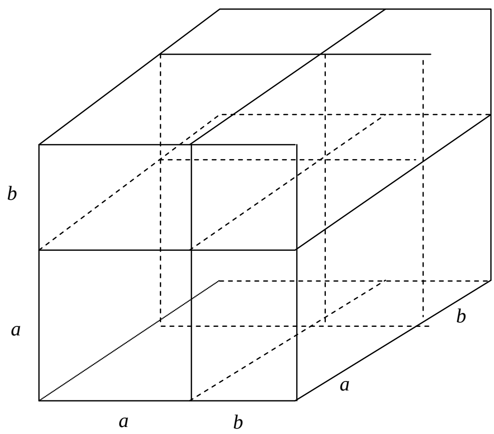

Рис 3. Куб суммы: $(a + b)^3$ = считай

На рис. 2 показана иная ситуация: понятая формула квадрата суммы позволяет вывести теорему Пифагора: площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей двух квадратов, построенных на катетах. Последние два квадрата на рисунке не показаны, но они имеются в структуре формулы, а значит, и в составе квадрата, построенного на гипотенузе: в логическом поле понимания «что доказано, то и есть» (см. там же [2], с. 39).

На рис. 3 изображена более сложная пространственная фигура, которая тем не менее для 85% смотрящих, понимаемая. Пропагандируя этот наглядный объект как средство понимания, мы предлагаем школьникам и студентам строить картофельный или хлебный куб, а затем делать три разреза на равных расстояниях от одной его вершины. Изучая структуру полученного содержания, легко составить формулу разложения куба суммы.

При этом важно то, что эта наглядность способствует построению абстрактных моделей многомерных фигур и тел: четырёхмерный куб, симплекс, гиперплоскость, гипершар и др. Для понимания сущности приведённых фигур необходимо лишь согласиться с тем, что величина a выражает длину некоторого отрезка, a^2 — площадь квадрата, стороной которого является этот отрезок, а a^3 — объём куба, ребро которого есть тот же отрезок. Кроме этого нужно понимать, что площадь прямоугольника, длины сторон которого равны a и b, равна ab, а объём параллелепипеда, рёбра которого имеют длины a, b и c, равен abc. Все эти понятия и факты становятся известными уже ученикам начальных классов, а формулы сокращённого умножения в седьмом классе выводятся абстрактно, согласно аксиоме умножения многочленов.

Абстрактная знаково-символическая деятельность, сформированная и развитая на наглядной основе, позволяет доказать интересные факты, которые можно затем формулировать в наглядной форме.

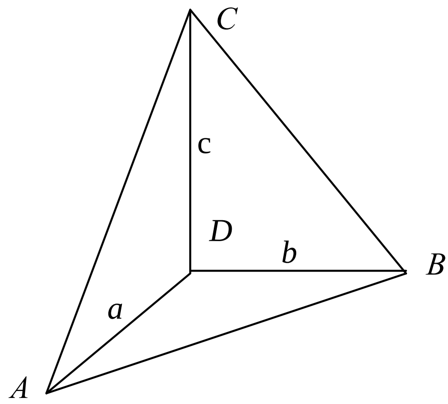

Рис. 4

Например. Имеет ли место пространственная теорема Пифагора (рис. 4): **сумма квадратов площадей граней катетов прямоугольного тетраэдра равна квадрату площади грани гипотенузы**.

Символически — имеет место равенство $S_D^2 = S_C^2 + S_B^2 + S_A^2$.

Индекс грани соответствует противоположной вершине. Ниже приведём краткое знаково-символическое доказательство этой теоремы. Для этого члены этого равенства необходимо выразить через рёбра-катеты тетраэдра a, b и c. Три боковых ребра вычислим по формулам Пифагора:

$$x = \sqrt{b^2 + c^2}, \quad y = \sqrt{b^2 + c^2},$$

$$z = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Площади граней-катетов вычисляются по катетам этих граней, и сумма этих площадей равна:

$$S_C^2 + S_A^2 + S_B^2 = \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$$

Площадь грани-гипотенузы *ABC* вычислим по формуле Герона:

$$S(ABC) = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)},$$

где $p = \frac{x+y+z}{2}$.

Отдельно вычисляем подкоренное выражение. $A^2(ABC) =$

$$= p(p-x)(p-y)(p-z) =$$

$$= \frac{1}{16}(x+y+z)(x+y-z)$$

$$(x-y+z)(-x+y+x) =$$

$$= \frac{1}{16}[(2x^2y^2 + 2y^2z^2 +$$

$$+ 2x^2y^2 - x^4 - y^4 - z^4)] =$$

$$= \frac{1}{16}[(b^2+c^2)\left(2(a^2+c^2) - (b^2+c^2)\right) +$$

$$+ (a^2+c^2)\left(2(a^2+b^2) - (a^2+c^2)\right) +$$

$$+ (b^2+a^2)\left(2(b^2+c^2) - (b^2+a^2)\right)] =$$

$$= \frac{1}{16}[(b^2+c^2)\left(2a^2+c^2-b^2\right) +$$

$$+ (a^2+c^2)\left(2b^2+a^2-c^2\right) + (a^2+b^2)$$

$$\left(2c^2+b^2-a^2\right)] =$$

$$= \frac{1}{4}(a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2)$$

Требуемое равенство установлено, а теорема Пифагора доказана.

Естественно, возникает вопрос: что означает понимание формулы? Мы можем утверждать, что понимается не формула, а те связи и отношения, которые она устанавливает. Оперирование математическими объектами представляет собой преимущественно знаково-символическую деятельность, содержание которой составляет использование и преобразование знаково-символических систем. Поэтому основные трудности и проблемы, возникающие в обучении математике, состоят в неумении студента преобразовать информацию, представленную знаково-символическими средствами в любой другой форме (в виде аналога, образа, системой действий с идеальными объектами, в виде набора связей с другими знаниями, как совокупность зрительных образов, в словесной форме).

Математика имеет дело непосредственно не с конкретными «пространственными формами и количественными отношениями», а с объектами, представляющими абстрагирование от действительного мира, обобщающими разнообразные реальные и идеальные ситуации. В природе нет пределов, производных, интегралов, рядов и дифференциальных уравнений, а есть процессы, моделируемые этими математическими объектами. Студенты должны изучить именно эти математические объекты как модели реальных процессов и должны уметь переходить от них к конкретным реальным ситуациям.

Наглядное моделирование — это формирование адекватного категории диагностично поставленной цели устойчивого результата внутренних действий обучаемого в процессе моделирования существенных свойств, отношений, связей и взаимодействий при непосредственном восприятии приёмов знаково-символической деятельности с отдельными знаниями или упорядоченными наборами знаний [3]. Это лучшее средство организации «понимающего усвоения» математического материала. Наглядно-модельное обучение можно определить как процесс организации и усвоения хороших, понятных моделей.

При построении моделей того или иного типа необходимо учитывать психофизиологические возможности человека, в частности, его способности, связанные с функциональной асимметрией головного мозга. Критерием эффективности при работе с моделью в обучении должны служить время и точность выполнения заданий при получении успешного результата.

Роль функциональной асимметрии человеческого мозга состоит в том, что два полушария воспринимают одну и ту же информацию о предмете двумя разными способами и постоянно сравнивают её между собой. Это обеспечивает внутренний «диалог» между полушариями и позволяет многократно переработать вербальную и образную информацию об изучаемом предмете и преобразовать её в нужную форму в данный момент.

Когда человеку даётся вербальное описание, оно преобразуется в образное за счёт внутренней работы мозга, на что затрачивается изрядное количество умственной энергии. Когда же информация даётся в готовом виде, мозг активизирует процесс обработки информации, поскольку это происходит не только за счёт внутренних ресурсов. В этом состоит естественная деятельность мозга в двухполушарном режиме (А.М. Кущнир, [4]). Наглядность модели объясняется тем, что она чувственно воспринимаема (её можно видеть, наблюдать в движении, изменении). Наглядность в обучении математике студентов технических вузов является самым простым и естественным средством организации понимающего усвоения математического материала.

Цитированная литература

1. *Ильина Т.А.* Педагогика. М. Просвещение, 1984.

2. Подготовка учителя математики: Инновационные подходы. / Под ред. В.Д. Шадрикова. / Коллектив авторов: В.В. Афанасьев, Ю.П. Поваренков, Е.М. Смирнов, В.Д. Шадриков. М., Гар-дарики, 2002.

3. *Лунгу К.Н.* Наглядное моделирование как средство обучения математике студентов технических вузов // Ярославский педагогический вестник. № 1, 2010. С. 135–139.

4. *Кушнир А.М.* Принцип природосообразности как методологическое основание проектирования технологий содержания обучения. М., Народное образование, 2009.