Суходольский Г.В.

ИЗМЕРЕНИЯ В ПСИХОЛОГИИ[1]

Математика и психология — в определённой мере пересекающиеся огромные области человеческих знаний, и, несмотря на очевидную молодость психологии по сравнению с математикой, отношения между ними исторически складывались естественным для науки образом. Мне понравилась мысль одного из исследователей о полезности различать математическую психологию как совокупность моделей психики и «психологическую математику» как совокупность математических методов, применяемых в психологии. Культура математических доказательств изучена в средней школе, а в вузе развитию логического мышления способствуют все изучаемые дисциплины. Аксиоматический подход не является достаточным и единственным в самой математике. А для гуманитариев, в том числе психологов, явно полезнее подход конструктивной, конечной математики, когда доказательством существования служит построение математического объекта хотя бы в одной из возможных форм. Для общей подготовки университетских психологов приходится выбирать из обширной и размытой сферы математических знаний те, которые как минимум необходимы для усвоения психологических дисциплин и формирования навыков научно-исследовательской и практической деятельности.

Измерение есть приписывание чисел объектам и событиям в соответствии с определенными правилами. Правило, согласно которому числа приписываются объекту, называется «измерительной шкалой». Измерительная шкала представляет собой мыслимую или материализованную числовую ось, на которой нанесены отметки, обозначающие целые, дольные и кратные единицы измерения.

В качестве единицы измерения, или меры, для любой измеряемой величины может выступать определенная порция этой же величины: расстояние, площадь, объем и т.д. В рациональном числе $R = a/b$, где в числителе стоит измеряемая величина, а в знаменателе — мера этой величины, само рациональное число оказывается результатом измерения, или «измеренным значени-

[1] Суходольский Г.В. Математические методы в психологии. 3-е изд., испр. Харьков: Изд-во «Гуманитарный центр», 2008. 284 с.

ем». Легко понять, что одна и та же величина *a,* отнесенная к разным мерам b, дает различное рациональное число, т.е. разный числовой результат измерения. Например, длина стола в метрах равна 1,2 м, а в сантиметрах равна 120 см.

История измерений убедительно свидетельствует о том, что единицы измерения выбирались самыми разными и во многом произвольно, однако с учетом человеческих масштабов деятельности. Так, небольшие длины измерялись соответственно размерами человеческого тела — дюймы, футы, локти, сажени, а сравнительно большие расстояния — в числе дней пути или расстояний, обеспечивающих возможность увидеть объект, — миля, лье и т.п.

Для общения и обмена необходимо единообразие и неизменность единиц измерения. Однако лишь во время Великой французской революции появилась идея метрических мер, а метрические системы для измерений были приняты многими странами лишь в конце XIX — начале XX века. И сейчас еще в англоязычных странах применяются неметрические меры.

В настоящее время в нашей стране, как и в других странах Европы, общепринята международная метрическая система СИ, с основами которой, по-видимому, знакомит средняя школа на уроках физики. СИ применяется во всех естественных и технических науках.

Экспериментальная психология с самого начала пользовалась метрической системой для измерения времени реакций. Тогда это называлось «психометрией», хотя на самом деле ограничивалось всего лишь хронометрией. Настоящая психометрия, озабоченная измерениями сложных психических сущностей и явлений, начала развиваться лишь в конце первой половины XX века.

Американский психофизик С.С. Стивене, которому принадлежит истолкование измерений, с которого я начал эту главу, предложил типологию измерительных шкал[2], получившую распространение. Это номинативные, порядковые шкалы, шкалы равных интервалов и равных отношений. Тип шкалы и ее, так сказать, измерительные способности определяются группами допустимых преобразований результатов измерений, выполненных в каждой шкале.

Номинативные шкалы, или шкалы наименований, используют числа не как количества, а как метки для различения объектов. Например — телефонные номера или номера игроков спортивной команды. Допустима для результатов применения номинативной шкалы группа тождественных преобразований: $x = y = z =$....

Порядковые, или ординальные, шкалы позволяют получать результаты либо в общем виде, либо в виде баллов, приписанных объектам экспертами-оценщиками. Между результатами существует отношение порядка, например: $x < x_2 < x_3 < x_4 <$ j • • • $< x_n$. но остаются неопределенными интервалы: $x_2 - x$^, $x_3 — x_2$ит,д. Иначе говоря, общие оценки либо баллы позволяют отвечать на вопросы «лучше или хуже», «дальше или ближе» один объект от другого, но насколько лучше или ближе (хуже, ′ дальше), ответа не дается. Для ординальных шкал допустимы

2 Математика, психофизика, измерение // Экспериментальная психология / Сост.: С.С. Стивене: В 2 т. Т. 1. М., 1960.

монотонно возрастающие преобразования: к примеру, $y = a/x$ изменяют порядок на противоположный.

Шкалы равных интервалов и равных отношений позволяют применять к результатам линейные преобразования и преобразования подобия. Различие между ними в том, что первые имеют лишь условное начало отсчета: $y – ax = Ъ$, тогда как вторые имеют истинное начало отсчета измерений. Типичный пример — температурные шкалы Цельсия и Кельвина.

Оценивая типологию шкал, по С.С. Стивенсу, надо обратить внимание на ряд моментов. Во-первых, сутью измерения служит не просто приписывание объекту числа, а приписывание числа, отражающего величину, квантующую количество данного качества. Номинативные шкалы, в смысле С.С. Стивенса, этого не выполняют. Следовательно, они в этом смысле не являются измерительными шкалами. Их можно превратить в измерительные, но для этого необходимо, чтобы числа выполняли роль не имен, а результатов измерения. Как это сделать, показано ниже.

Во-вторых, в психологии стало чуть ли не нормой синонимизировать понятия порядковой и ранговой шкал. А это неверно. Если результаты в порядковой шкале представлены лишь в общем виде: x_2 <..., то здесь не определены интервалы и нет собственно чисел как результатов измерения. Если же объектам приписываются баллы, или ранги, то возникает вопрос, соответствуют ли разницы между рангами действительному различию между объектами; к примеру, одинакова ли разница между отличным и хорошим ответами на экзамене и хорошим и удовлетворительным, хотя различия в оценках численно равны: 5 – 4 = = 4 – 3 = 1? Ни один преподаватель не ответит на этот вопрос утвердительно.

А между тем здесь спутываются две разные операции: упорядочение объектов и приписывание им рангов. Всем известны спортивные либо воинские команды: «По росту становись!» и «По порядку номеров рассчитайся!». В ряду выстроившихся по убыванию роста людей интервалы величин роста соседей произвольны. Но порядок номеров — ранги — это натуральный ряд чисел с равными единице интервалами. Так вот, в результате применения этих команд, по сути, происходит отображение ординальных данных в равноинтервальный ряд, т.е. выполняется операция «линеаризации» переменной *X* в *Y* (рис. 1).

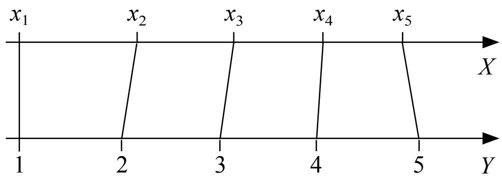


Рис. 1. Линеаризация значений ***X в У:***
X – результат упорядочения по убыванию,
Y – ранги, т.е. натуральные числа

То обстоятельство, что при линеаризации, или ранжировании, ряда объектов «объектные» интервалы несколько увеличиваются либо уменьшаются по сравнению с равными интервалами рангов, не должно смущать: любые измерения совершаются с ошибками, абсолютно точных измерений не существует. Для выявления и учёта ошибок, или так называемых погрешностей, измерения существует особая теория и методы измерений.

Различают систематические и случайные, абсолютные и относительные погрешности, погрешности прямых и косвенных измерений. Особо выделяют промахи — грубые ошибки, обусловленные невниманием субъекта либо иногда другими. К систематическим погрешностям относятся искажения результатов измерения по сравнению с реальностью, как, например, когда бегут либо отстают часы или когда результаты телефонного опроса горожан выдают за мнение всего населения. Учесть систематические погрешности можно лишь с помощью более точных измерений.

К числу случайных погрешностей относят флюктуации измерений — случайные отклонения от некоторого сравнительно точного результата. В отличие от систематических погрешностей, которые однонаправленны, случайные погрешности распределяются более или менее симметрично относительно верного значения.

Абсолютные погрешности суть разности между полученным и принятым за истину результатом. Они могут быть как положительными, так и отрицательными.

Относительные погрешности — это отношение абсолютных погрешностей к базе шкалы, либо к локусу значений, либо к конкретному значению шкалы. Относительные погрешности безразмерны и тем удобны по сравнению с погрешностями абсолютными.

Прямые измерения осуществляются непосредственно, как измерение длины стола линейкой. Косвенные измерения опосредованы зависимостями между величинами. В них непосредственно измеряются аргументы, а погрешность зависимой переменной — функции — вычисляется определенным образом по известным уравнениям. Общеизвестный пример косвенных измерений — измерение температуры тела медицинским градусником. Замечу, что для психологии проблема оценки погрешностей косвенных измерений весьма актуальна, особенно в тестологии. Мне пришлось убедиться, что некоторые методы измерения интеллекта по точности относятся к высокоточным измерительным приборам[3].

В науке принято одни объекты конструировать из других, взятых за основные. Синтезированные из основных объекты называются *производными*. Соответственно этому в науке об измерениях выделяют основные и производные величины, основные и производные единицы измерения. Простейший пример: путь, время — основные, скорость и ускорение — производные. Вообще-то все равно, что выбрать за основу, важна взаимосвязь величин. Мы привыкли к тому, что путь, точнее длина, и время, т.е. протяженность и длительность, приняты за основные, и поэтому скорость определяется как отношение пути ко времени и измеряется в м/с. Но ведь путь равен произведению скорости на время: = Fм/с • *T* с. И за основные можно было бы принять величины (единицы) скорости и времени. Тогда величина пути оказалась бы производной и имела бы размерность «скорость на время».

Так обстоит дело в естественных науках, насчитывающих не одно столетие в своем развитии. Поскольку в агрегировании производных величин сказывается наличие или отсутствие истинного начала отсчета при их

---

3 *Суходольский Г.В.* Математическая психология. Харьков, 2006.

измерениях, существенное значение приобретает различие между шкалами равных интервалов и равных отношений. Для агрегирования (синтеза, построения) производных величин необходимы последние — шкалы равных отношений. Только они позволяют строить мультипликативную формулу размерности, по которой построены и строятся физические величины:

$$\dim = (L^{\alpha} \cdot M^{\beta} \cdot T^{\gamma} \cdot \ldots),$$

К сожалению, в психологии, да и во многих других науках, естественные начала отсчета не известны. Ну где, например, начало, т.е. ноль, интеллекта или личности человека? Поэтому для производных величин в психологии используется аддитивный способ агрегирования: именно суммы баллов определяют итоговые оценки, или рейтинги, в спорте, политологии, педагогике. Аддитивный способ получения производных оценок, пожалуй, с самого начала был принят в психодиагностике.

Справедливости ради хочу отметить, что мультипликативный способ, принятый в точных науках, пожалуй, ошибочно считается главным. Ведь логарифмируя мультипликативную формулу и переобозначая переменные, приходим к способу аддитивному:

$$\lg \prod_i x_i^{a_i} = \sum_i a_i \lg x_i = \sum_i a_i y_i.$$

По крайней мере, аддитивное построение производных величин столь же необходимо в науке, как и мультипликативное.

В предыдущей главе я не привел фундаментального разделения величин на одномерные и многомерные. Теперь это можно и нужно сделать: многомерные величины обладают спецификой и служат материалом для синтеза производных, снова одномерных величин.

Чтобы измерить одномерную величину, нужно отобразить ее на числовую ось, играющую роль измерительной шкалы. Для измерения многомерной величины необходимо отобразить ее одномерные компоненты на числовые оси как частные измерительные шкалы. Очевидно, что количество числовых осей соответствует числу компонент многомерной (конечномерной) величины.

Конечное множество числовых осей, если их не меньше двух, образует многомерную (конечномерную) измерительную шкалу и одновременно представляет собой так называемое метрическое пространство.

Под пространством сейчас понимают множество произвольной природы с отношениями на нем типа близости, окрестностей и т.п. Эти отношения в явном виде заданы лишь в метрических пространствах, для которых установлены способы числовой оценки расстояний между объектами, изображаемыми в метрическом пространстве.

Способ измерения расстояний называется метрикой. Если метрика не установлена, то пространство является неметрическим. Очевидно, величины, которые люди пока не научились измерять, отображаются неметрическими пространствами. Отсюда проблема метризации пространств в психологии и других науках. Но в психометрии многое уже сделано.

Из метрических пространств, пожалуй, наиболее известно и употребительно в приложениях евклидово пространство. Его метрика определяется формулой:

$$d_{AB} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_{Ai} - x_{Bi})^2}\ .$$

где *A, B* — объекты, d_{AB} — расстояние между ними.

Из этой формулы легко понять, что в одномерном пространстве *(n* = 1) налицо обычное линейное расстояние. В двумерном пространстве, т. е. на плоскости, перед нами пифагорова формула: квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов, ведь разности $x_Л - x_Ц$ соответствуют проекциям катетов нарисованного на плоскости треугольника на оси абсцисс и ординат.

Расстояние является сложным отношением, которое определяется конъюнкцией трех более простых отношений для евклидова пространства. Они образуют аксиомы евклидовой метрики. Это аксиомы тождества, симметрии и транзитивности.

Аксиома тождества гласит: расстояние объекта с самим собой равно нулю; если А = *B,* то $d_М = 0$. Аксиому симметрии можно сформулировать так: расстояния туда и обратно равны: $c1_М = d_М$. Аксиому транзитивности (или треугольника) можно выразить так: расстояние между двумя пунктами не меньше суммы расстояний от них до пункта, расположенного между ними: $d_{AC} < d_{AB} + + d_{BC}$; понятно, что равенство имеет место тогда, когда промежуточный пункт лежит на прямой, соединяющей два других, а если он не лежит на этой прямой, то налицо треугольник, в котором, как известно, сумма двух сторон больше третьей стороны.

Интерпретацию евклидова пространства в виде четырехмерного континуума «пространство-время» предложил в начале нашего века известный математик Герман Минковский (ему же принадлежит и обобщенная формула метрики, позволяющая интерпретировать и неевклидовы метрики; ее мы не будем рассматривать). Четырехмерный континуум пространство-время, охватывающий длину, ширину и глубину локуса пространства, а также начальный и конечный моменты пребывания в этом локусе, полезен для исследования движений и действий человека в психологии труда и инженерной психологии[4].

Развитие науки и техники связи в середине XX века привело к поиску пространств для изображения дискретных сообщений. Одно из них — хеммингово пространство — является дискретным дериватом пространства евклидова:

$d_{AB} = \sum_{i=1}^{n}|x_{Ai} - x_{Bi}|$ — вот формула хемминговой метрики: значения $x_М$ и $x_Т$ двузначны, поэтому если А = В, то $x - x_а = 0$, но если А^В, то x ~ x =1.

Хеммингово пространство, по сути, сводится к многоразрядной двоичной системе счисления. В одномерном случае различны лишь два объекта — 0 или 1, т.е. «нет» либо «да». Двумерный случай — «единичный дискретный квадрат» — позволяет различать четыре объекта: 00, 01,10 и 11. Единичный дискретный куб отображает восемь объектов и т.д. Важно, что эти объекты суть вершины нуль-графа ц расстояния между вершинами оцениваются как бы движением по воображаемым звеньям графа, отсюда следует суммирование парциальных рассто-

[4] ***Суходольский** Г.В.* Математико-психологические модели деятельности. СПб., 1994.

яний (по г-м координатам) в формуле хемминговой метрики.

Модифицированная идея хемминговой метрики позволяет реанимировать стивенсовскую номинативную шкалу в качестве измерительной. Действительно, пусть для оценки координатных частных расстояний используются граничные значения числового единичного интервала: 0 или «нет» и 1 или «есть». Пусть оценивается конечномерный объект, свойствам которого приписываются нули либо единицы соответственно тому, не выражено (слабо выражено) или выражено (сильно выражено) свойство. Результаты частных оценок, образующих, в сущности, двоичное число, суммируются в обычном арифметическом смысле. Так что получается оценка, значения которой лежат в пределах от нуля до n, количества свойств.

Оценки суть измерения, осуществляемые людьми органолептически, с помощью своих природных способностей — на глаз, на вкус и т.д. И то, что одному кажется хорошим, другому представляется плохим. Однако и в быту, и в науке органолептический, или экспертный, способ оценки широко распространен. Обычно один и тот же объект оценивается несколькими экспертами, и в результате возникает задача оценки сходства, или согласия, между экспертными оценками.

Например, пусть эксперты А и В оценивают объект по следующему ряду качеств (свойств, признаков и т.п.): плохой — хороший, низкий — высокий, глупый — умный, больной — здоровый, злой — добрый. Можно записать в столбик положительные значения качеств и приписать справа столбики их оценок экспертами. Затем найти частные разности d = 0; 1 и суммировать как оценки экспертов, так и частные разности в итоговые оценки (табл.).

Таблица

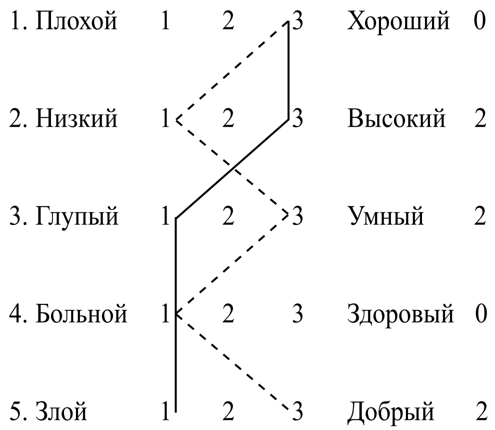
Качество	**Оценка эксперта**		d,
	A	B	
1. Хороший	1	1	0
2. Высокий	0	1	1
3. Умный	1	0	1
4. Здоровый	0	0	0
5. Добрый	1	0	1
Сумма	**3**	**2**	**3**

Заметим, что частная оценка равна нулю при тождестве экспертных оценок и равна единице при их различии. Легко видеть, что первый эксперт оценивает объект выше, чем второй. При этом их мнения различны. Легко видеть также, что полученные оценки объекта и близости мнений зависят от числа оцениваемых свойств. Чтобы избавиться от этой зависимости, нужно сделать линейное преобразование:

$$S_{AB} = 1 - \frac{2\sum_i d_i}{n} = 1 - \frac{2 \cdot 3}{5} = -0,2,$$

где $0 < S_{AR} < 1$; я назвал этот коэф-фициент коэффициентом согласия (замечу, что в литературе его иногда ошибочно называют Коэффициентом двоичной корреляции). Экспертные оценки нормируются числом оценивавшихся свойств, после чего приобретают значение, лежащее в интервале (0; 1).

Наряду с двоичной можно использовать троичную и другие системы счисления для оцифровки числовых осей, служащих образами оцениваемых качеств. Приведенный пример можно отобразить и так:



Заметим, что соотношения оценки экспертов изображены для А пунктирной, для *В* сплошной линиями. Суммарные оценки легко подсчитываются: для А: 3 + 1 + 3 + 1 + + 3 = 11, для В: 3 + 3 + 1 + 1 + 1 = 9.

Частные оценки | *d.*\ определяются обычными разностями, а суммарная оценка близости мнений экспертов — это сумма частных оценок: 0 + 2 + 2 + 0 + 2 = 6. Чтобы избавиться от зависимости, создаваемой количеством свойств, снова применим линейное преобразование:

$$S_{AB} = 1 - \frac{2\sum_i d_i}{nD_{\max}} = 1 - \frac{2 \cdot 6}{5 \cdot 2} = -0,2,$$

где 0 < S^ < 1 — коэффициент согласия, D — максимальная разность частных шкальных оценок.

Я специально троичную модификацию двоичного примера сделал так, чтобы оценки экспертов были сходны. Можно видеть, что при этом результат — мера согласия мнений — один и тот же. Иначе говоря, нет смысла выбирать многозначную базу оцифровки шкал, даже руководствуясь благим намерением дать экспертам возможность для более дифференцированной оценки.

Подведем некоторые итоги. Многомерная величина при измерении отображается на многомерную же измерительную шкалу той же мерности и размерности. Эта шкала представляет собой метрическое пространство с евклидовой, хемминговой либо квазихемминговой метрикой. В результате многомерная величина определяется в явном виде, аналитически, «*n*-кой», или кортежем, вектором числовых значений, характеризующих одномерные компоненты. С точки зрения аналитической геометрии эти числовые значения суть координаты точки в декартовом пространстве, изображающей многомерную величину (объект). Таковы общепринятые воззрения в этой области.

В психометрии, однако, еще в начале XX века Г.И. Россолимо был предложен иной способ геометрического, точнее аналитико-геометрического, изображения многомерных величин — это «психологические профили». Они быстро завоевали место в психологических отраслях — в психодиагностике, в изучении семантических дифференциалов. Пример троичной оценки экспертами свойств объекта дает представление о психологическом профиле.

Психологические профили широко используются, но никто не подумал о том, что они выражены не в прямоугольной, а в иной системе координат, которую можно назвать «параллельной» системой. Один и тот же конечно-мерный объект, обычно представляемый точкой в декартовой системе координат, в системе параллельных координат изображается профилем. При этом аналитическое отображение в виде числового вектора координатных значений сохраняется.

«Профильное» представление многомерного объекта выгодно отличается от «точечного» — тем, что сохраняется наглядность в изображении, которая в обычных координатах теряется за пределами трех измерений. Таким образом, представление объекта в виде ломаной линии (профиля) в параллельной системе координат — это еще один вклад психологии в прикладную математику.