УЧЕБНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ В ПРОДУКТИВНОМ ОБУЧЕНИИ БУДУЩИХ БАКАЛАВРОВ-МАТЕМАТИКОВ

БУКУШЕВА Алия Владимировна, *кандидат педагогических наук, доцент кафедры геометрии механико-математического факультета Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского, bukusheva@list.ru*

Внедрение информационных и коммуникационных технологий в образовательную деятельность повышает актуальность разработки методических подходов в продуктивном обучении студентов. Применение пакетов прикладных программ позволяет сделать обучение студентов геометрическим дисциплинам более наглядным, приближенным к практическим задачам, а также решать сложные геометрические задачи, проводить занятия на качественно новом уровне. В статье рассматриваются учебно-исследовательские задачи по дисциплине «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование», реализуемой на механико-математическом факультете Саратовского национального исследовательского государственного университета им. Н.Г. Чернышевского (СГУ). Рассматривается связь дисциплины «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» с другими геометрическими дисциплинами, приводятся примеры учебно-исследовательских задач, решаемые с использованием Wolfram Mathematica.

Ключевые слова: *математика и компьютерные науки, компьютерная геометрия и геометрическое моделирование, Wolfram Mathematica, продуктивное обучение, исследовательские задачи.*

Отрасль информационных технологий является одной из наиболее динамично развивающихся отраслей как в мире, так и в России. Перед системой высшего образования ставится задача повышения качества подготовки IT-специалистов. Выпускник направления бакалавриата «Математика и компьютерные науки» в своей профессиональной деятельности использует математические методы и компьютерные технологии, решает различные задачи с использованием математического моделирования процессов, объектов и программного обеспечения. Работа бакалавра-математика носит творческий характер, связана с созданием нового продукта. Объектами его профессиональной деятельности являются: системообразующие понятия фундаментальной (гипотезы, теоремы, методы, математические модели) и прикладной (алгоритмы, программы, базы данных, операционные системы, компьютерные технологии) математики[1]. Современные математики-исследователи, математики-прикладники, IT-специалисты используют в своей работе методы компьютерной геометрии для анализа и решения прикладных задач в научных исследованиях. Таким образом, внедрение информационных и коммуникационных технологий в научно-практическую и образовательную деятельность, введение федеральных государственных образовательных стандартов третьего поколения повышают актуальность разработки методических подходов в продуктивном обучении студентов.

Продуктивное обучение —это организация условий для выполнения каждым обучающимся в рамках учебного плана самостоятельного проекта и собственной образовательной программы, непосредственно связанных с его деятельностью на реальном рабочем месте, а также педагогическое и психологическое сопровождение обучающегося в его самостоятельной учёбе, развитии мотивации и заинтересованности в образовании[2].

Продуктивная учебная деятельность —это вид учебно-познавательной деятельности, характерной чертой которой является получение студентом объективно нового или субъективно нового результата (продукта)[3]. Продуктивная учебная деятельность направлена не столько на изучение известного, сколько на приращение к нему нового, на

---

1 Федеральный государственный образовательный стандарт высшего профессионального образования по направлению подготовки 02.03.01 – математика и компьютерные науки, квалификация (степень) «бакалавр». Утверждён приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 7 августа 2014 г. № 949. [Электронный ресурс] — URL: минобрнауки.рф/документы/7562 (дата обращения: 09.09.2016).

2 *Крылова Н.Б.* Организация продуктивного обучения: содержание и формы, размышления и рекомендации // Серия научно-методических изданий «Новые ценности образования». — 2008. — № 3. — С. 5.

3 *Попкова Е.А.* Формирование умений продуктивной учебной деятельности у будущего инженера в процессе обучения физике: автореф. дис. … канд. пед. наук. — Киров, 2009. — С. 9.

сотворение студентами образовательного продукта. Основными признаками продуктивной учебной деятельности являются: выработка новых образцов действий, познавательных процедур, методов; получение результатов в виде новых продуктов, проектов; использование коллективных форм мыслительной деятельности; рефлексия деятельности и её результатов[4].

Организация продуктивной учебной деятельности возможна на занятиях различных форм: на лекциях, практических занятиях, лабораторных занятиях. Особую роль в организации продуктивного обучения занимают учебно-исследовательские задачи. Использование математических и прикладных исследовательских задач в учебном процессе позволяет: сформировать «платформу для активной мыслительной деятельности учащихся»; развивать исследовательские умения, а также закреплять, систематизировать, углублять и обобщать имеющиеся знания; повысить мотивацию учения; формировать креативные качества личности студентов; активизировать рефлексивные процессы обучаемых[5]. Учебно-исследовательская задача занимает промежуточное положение между учебной задачей, алгоритм решения которой неизвестен только студенту, и научно-исследовательской задачей, которая формулируется самим исследователем, способ решения которой, чаще всего, неизвестен, а её решение даёт объективно новые знания. Такие учебно-исследовательские задачи могут выступать в учебном процессе вуза определённым аналогом исследовательских задач в науке.

Приведём примеры учебно-исследовательских задач на материале компьютерной геометрии. Дисциплина «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» изучается студентами, обучающимися по направлению «Математика и компьютерные науки», в 7-м семестре. Целью учебной дисциплины «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» является формирование и развитие у студентов практических навыков моделирования геометрических объектов и создания визуализации с помощью компьютерных технологий. Задачами дисциплины являются: изучить математический аппарат, необходимый для моделирования геометрических объ-

---

[4] *Попкова Е.А.* Формирование умений продуктивной учебной деятельности у будущего инженера в процессе обучения физике: автореф. дис. ... канд. пед. наук. — Киров, 2009. — С. 9.

[5] *Смирнова Е.С.* Роль исследовательских задач в развитии исследовательских компетенций будущих бакалавров по направлению подготовки «Прикладная математика и информатика» // Вестник КГУ им. Н.А. Некрасова. Серия: Педагогика. Психология. Социальная работа. Ювенология. Социокинетика. — 2014. — № 2. — С. 106.

ектов, освоить современные компьютерные технологии для изображения и моделирования геометрических объектов, познакомить студента с основами компьютерного геометрического моделирования, которое позволяет сделать работу математика более эффективной.

В учебном плане подготовки бакалавров-математиков, реализуемом на механико-математическом факультете СГУ, можно выделить следующий цикл геометрических дисциплин: «Аналитическая геометрия», «Дифференциальная геометрия и топология», «Гладкие многообразия и управляемые системы», «Симплектическая геометрия и гамильтоновы системы», «Дополнительные главы геометрии и алгебры», «Группы и алгебры Ли», «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование». Компьютерная геометрия оказывается связующим звеном геометрического блока — использование прикладных программ позволяет студенту взглянуть на ранее изученный материал с единой точки зрения[6]. В качестве примера можно указать задачу классификации трёхмерных алгебр Ли. Решая эту задачу, студент сталкивается с необходимостью одновременно использовать объекты всех изучаемых ранее геометрических дисциплин.

В качестве основного программного средства для проведения лабораторных занятий по дисциплине «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» в СГУ выбрана система компьютерной математике Wolfram Mathematica. В научно-методической литературе возможности Mathematica в решении математических задач проанализированы в работах В.З. Аладьева, В.П. Дьяконова, А.О. Иванова, Д.П. Ильютко, Т.В. Капустиной, Г.В. Носовского, В.Б. Таранчук, А.А. Тужилина, А.Т. Фоменко и других. Применение системы Mathematica в процессе обучения высшей математике описана в диссертационных работах С.А. Дьяченко, Е.А. Дахер и др. Методику изучения геометрии в педагогическом вузе с использованием Mathematica рассмотрены в диссертационных исследованиях О.А. Бушковой, А.Р. Ганеевой. Внеаудиторная самостоятельна работа студентов организуется с использованием свободного программного обеспечения Maxima, GeoGebra.

На занятиях по компьютерной геометрии необходимо отразить взаимосвязь содержания дисциплины компьютерной геометрии с содержанием других дисциплин учебного плана, показать профессионально-практическую значимость

---

6 *Букушева А.В.* Место компьютерной геометрии в подготовке бакалавров-математиков // Современные информационные технологии и ИТ-образование [Электронный ресурс] / Сборник научных трудов X Юбилейной международной научно-практической конференции; под ред. В.А. Сухомлина. — М.: МГУ, 2015. 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). — С. 272–275

компьютерной геометрии. Подбор индивидуальных заданий по компьютерной геометрии для студентов является важной и сложной задачей. Проведённый анализ рабочих программ по дисциплине «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» для направления «Математика и компьютерные науки» показал, что в содержании дисциплины можно выделить инвариантную часть учебного материала и вариативную. Первая часть посвящена таким вопросам, как: решение задач дифференциальной геометрии, сплайны и кривые Безье, поверхности Безье, компьютерная графика. Вторая часть содержания определяется научными исследованиями авторов рабочей программы и кафедры, реализующей данную дисциплину.

Приведём примеры разноуровневых задач. Задачи репродуктивного уровня позволяют оценивать и диагностировать знание фактического материала (базовые понятия, алгоритмы, факты) и умение правильно использовать специальные термины и понятия, узнавание объектов изучения в рамках определённого раздела дисциплины. Например, а) построить изгибание: простого куска цилиндра на простой кусок плоскости; простого куска плоскости на простой кусок конуса; катеноида в геликоид; б) на гиперболическом параболоиде визуализировать прямолинейные образующие, проходящие через динамически заданную точку поверхности. Положение точки задать двумерным слайдером. Изучить взаимное положение образующих одного семейства. Как меняется плоскость, которой они параллельны? Изучить взаимное положение образующих разных семейств.

Задачи реконструктивного уровня позволяют оценивать и диагностировать умения синтезировать, анализировать, обобщать фактический и теоретический материал с формулированием конкретных выводов, установлением причинно-следственных связей. Например:

а) нахождение и визуализация: локсодром на поверхностях; геодезических на поверхностях;
б) на сфере точки (динамически их меняя), дугу между точками, вывести на экран расстояние между точками;
в) изобразить поверхность Каталана, динамически меняя параметры;
г) изобразить два семейства образующих на седловой поверхности. Начальная точка динамически меняется;
д) разрезать бутылку Клейна и убедиться, что она составлена из двух листов Мёбиуса. Вырезать из проективной плоскости диск и убедиться, что оставшаяся часть — лист Мёбиуса.

Задачи творческого уровня позволяют оценивать и диагностировать умения, интегрировать знания различных областей, аргументировать собственную точку зрения. Например:

а) изобразить индикатрису Дюпена на торе;
б) для данной поверхности визуализировать геодезическую, выходящую из данной точки в данном направлении.

Обеспечить динамическое изменение точки, направления и длины геодезической. Изучить поведение геодезических на поверхности вращения (визуализировать теорему Клеро об угле между геодезической и меридианом); в) для данной поверхности изобразить каустику (множество центров кривизны). Реализовать там же распространение волнового фронта (семейство эквидистант). На примере эллипсоида убедиться, что особенности всех волновых фронтов образуют каустику; г) реализовать операцию ковариантного дифференцирования тензорного поля произвольного типа. В качестве аффинной связности использовать или заданную, если она есть, или указанную в необязательном аргументе. С помощью полученной функции реализовать ковариантное дифференцирование вдоль векторного поля и запись уравнения геодезических.

Использование пакетов прикладных программ позволяет решать сложные геометрические задачи, в которых используются понятия разных дисциплин[7]. Дисциплина «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» предназначена не только интегрировать в единое целое ряд геометрических дисциплин, изучаемых студентами, но и способствовать более глубокому изучению каждой из этих дисциплин.

Рассмотрим задачу раскрашивания карт на поверхностях, которая объединяет компьютерную геометрию с дисциплинами «Дифференциальная геометрия и топология», «История математики». Хивуд доказал, что любую карту на торе можно раскрасить семью красками[8]. Приведём решение данной задачи, программа написана на языке программирования Wolfram Language[9].

In[1]:= Manipulate[Show[pictures[[i]], ImageSize — > 1.18 {400, 400}], {{i, 1, «rectangle to torus»}, 1, 11, 1}, SynchronousInitialization->True, Initialization:> {graph = Graphics[{{ RGBColor[0, 1, 1], Polygon[{{0, 0}, {1, 0}, {0, 1}}], Polygon[{{13, 0}, {14, 0}, {14, 1}, {10, 5}, {8, 5}}]}, {RGBColor[1, 1, 0.501961], Polygon[{{1, 0}, {3, 0}, {0, 3}, {0, 1}}], Polygon[{{14, 1}, {14, 3}, {12, 5}, {10, 5}}]}, {RGBColor[1, 0.501961, 0.752941], Polygon[{{3, 0}, {5, 0}, {0, 5}, {0, 3}}], Polygon[{{14, 3}, {14, 5}, {12, 5}}]}, {RGBColor[1, 0, 0], Polygon[{{5, 0}, {7, 0}, {2, 5}, {0, 5}}]}, {RGBColor[0,

---

7 *Букушева А.В.* Использование систем компьютерной математики для решения геометрических задач сложного уровня // Информационные технологии в образовании: Материалы VI Всероссийской научно-практической конференции. — Саратов: Издательский центр «Наука», 2014. — С.76–77.

8 *Болтянский В.Г., Ефремович В.А.* Наглядная топология. — М.: Наука, 1983. — С. 76.

9 Wolfram Demonstrations Project [Электронный ресурс] URL: http://demonstrations.wolfram.com / (дата обращения: 09.09.2016).

```
0, 1], Polygon[{{7, 0}, {9, 0}, {4, 5}, {2, 5}}]}, {RGBColor[0.501961, 0.25098, 0], Polygon[{{9, 0}, {11, 0}, {6, 5}, {4, 5}}]}, {GrayLevel[0.752941], Polygon[{{11, 0}, {13, 0}, {8, 5}, {6, 5}}]}}, PlotRange -> {{0, 14}, {0, 5}}]; tekstur = Image[graph]; pictures = Table[If[i = 1, graph, ParametricPlot3D[{(2 + Cos[(i — 1) v/10]) Cos[(i — 1) u/10], (2 + Cos[(i — 1) v/10]) Sin[(i — 1) u/10], Sin[(i — 1) v/10]}, {u, 0, 2 \[Pi]}, {v, 0, 2 \[Pi]}, Mesh -> None, PlotStyle -> {Texture[tekstur]}, PlotRange -> 3 {{-1, 1}, {-1, 1}, {-1, 1}}, Boxed -> False, Axes -> False, SphericalRegion -> True]], {i, 1, 11}]}].
```

Рассмотрим задачу, которая объединяет компьютерную геометрию с дисциплиной «Гладкие многообразия и управляемые системы». Основным предметом изучения дисциплины «Гладкие многообразия и управляемые системы» являются динамические системы, заданные на многообразиях с дополнительными тензорными структурами. Особый интерес представляют многообразия с заданными на них полями метрического тензора — риманово многообразие. Римановы структуры являются хорошей моделью для многих интересных задач механики и физики. Особый интерес с точки зрения приложения геометрии к естествознанию представляют собой геодезические риманова многообразия. Геодезическая — является кратчайшей или прямейшей с геометрической точки зрения и оптимальной траекторией движения некоторой механической системы. На евклидовой плоскости класс «прямейших» совпадает с классом кратчайших. То же самое можно сказать про известные многообразия: сфера, цилиндр и другие поверхности евклидова трёхмерного пространства. Ситуация усложняется, если на движение механической системы наложить неинтегрируемые связи. С геометрической точки зрения наложение неинтегрируемых связей означает задание на многообразии гладкого распределения такого, что геодезическая (траектория движения механической системы) должна всюду касаться этого распределения. Нахождение таких геодезических представляет собой сложную задачу, решение которой не всегда может быть достигнуто с использованием компьютерных программ, определяющих явное выражение искомых переменных —координат точек, зависящих от параметра — в квадратурах.

Понимание геометрической составляющей решаемой задачи позволяет обойти возникающие при этом трудности с помощью задания подходящей системы координат. В качестве примера рассмотрим движение материальной точки, моделируемое геодезической трёхмерного риманова многообразия. Кинетическая энергия изучаемой динамической системы задаётся с помощью метрического тензора риманова многообразия. В самом общем случае в произвольной выбранной системе координат этот тензор имеет вид:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Предположим, что на динамическую систему наложена неинтегрируемая линейная связь. Геометрически это означает, что на римановом многообразии (конфигурационном пространстве системы) определяется дополнительная тензорная структура: гладкая 1-форма. Тогда, как известно, уравнение соответствующей геодезической в специально выбранной системе координат записывается следующим образом:

$$\begin{cases} \ddot{x}^a + \Gamma^a_{bc}\dot{x}^b\dot{x}^c = 0, \\ \dot{x}^n = -\Gamma^d_a \dot{x}^a. \end{cases} \qquad (1)$$

В общем случае данная система не является интегрируемой в квадратурах. В этом случае для упрощения и последующего интегрирования системы используются качественные методы, к которым можно отнести метод специализации используемой системы координат. Выбор ещё более удобной системы координат, по отношению к той, в которой записаны уравнения (1), возможен не всегда. Такая возможность появляется, в частности, в том случае, когда некоторые из вариантов конфигурационного многообразия принимают специальный вид. Так, например, обращение в нуль тензора Схоутена значительно упрощает вид системы (1), что позволяет проинтегрировать, получив решение систем в квадратурах.

Рассмотрим пример движения частицы единичной массы с кинетической энергией, задаваемой римановой метрикой специального вида:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1+y^2 & 0 & y \\ 0 & 1 & 0 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Для удобства в программе запишем $x^1=x$, $x^2=y$, $x^3=z$. Используя программу Wolfram Mathematica, находим коэффициенты связности, затем тензор кривизны данной метрики[10].

In[1]:= g = MatrixForm[{{1 + y^2, 0, y}, {0, 1, 0}, {y, 0, 1}}]

In[2]:= gin = Inverse[{{1 + y^2, 0, y}, {0, 1, 0}, {y, 0, 1}}] // MatrixForm

Получим обратную матрицу (g^{ij}) :

Out[2]//MatrixForm =

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1+y^2 \end{pmatrix}.$$

In[3]:= var = {x, y, z}.

[10] *Букушева А.В.* Использование Mathematica для описания геометрии динамических систем // Математика и ее приложения: фундаментальные проблемы науки и техники: сборник трудов всероссийской конференции, Барнаул, 24–26 ноября 2015. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2015. — С. 248–249.

Пользуясь формулой:

$$\Gamma_{ij}^{k}=\frac{1}{2}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}}\right),$$

задаём два массива Cr1и Cr2, где Cr1 вычисляет:

$$\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^{i}}+\frac{\partial g_{il}}{\partial x^{j}}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^{l}},\ \mathrm{Cr2} — \Gamma_{ij}^{k}.$$

In[4]:= Cr1 = Array[, {3, 3, 3}];

In[5]:= Cr2 = Array[, {3, 3, 3}];

In[6]:= Do[Cr1[[i, j, k]] = 1/2 (D[g[[1, i, k]], var[[j]]] + D[g[[1, j, k]], var[[i]]] — D[g[[1, i, j]], var[[k]]]), {k, 3}, {j, 3}, {i, 3}]

In[7]:= Do[Cr2[[l, i, j]] = Sum[gin[[1, l, k]] Cr1[[i, j, k]], {k, 3}], {j, 3}, {i, 3}, {1, 3}]

In[8]:= MatrixForm[Cr2] // FullSimplify:

Out[8]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0\\ \frac{y}{2}\\ 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{y}{2}\\ 0\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}-y\\ 0\\ -\frac{1}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ 0\\ 0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\\ 0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}\frac{1}{2}-\frac{y^2}{2}\\ 0\\ -\frac{y}{2}\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0\\ -\frac{y}{2}\\ 0\end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Пользуясь формулой:

$$R_{lkj}^{i}=\frac{\partial\Gamma_{lj}^{i}}{\partial x^{k}}-\frac{\partial\Gamma_{lk}^{i}}{\partial x^{j}}+\Gamma_{mk}^{i}\Gamma_{lj}^{m}-\Gamma_{mj}^{i}\Gamma_{lk}^{m},$$

задаём массив r.

In[9]:= r = Array[, {3, 3, 3, 3}];

In[10]:= Do[r[[i, l, k, j]] = D[Cr2[[i, l, j]], var[[k]]] — D[Cr2[[i, l, k]], var[[j]]] + Sum[Cr2[[i, m, k]] Cr2[[m, l, j]], {m, 3}] — Sum[Cr2[[i, m, j]] Cr2[[m, l, k]], {m, 3}], {i, 3},{j, 3}, {k, 3}, {1, 3}]

In[11]:= MatrixForm[r] // FullSimplify:

Out[11]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix}0&0&-\frac{y}{4}\\ 0&0&0\\ -\frac{y}{4}&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-\frac{3}{4}&0\\ \frac{3}{4}&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{4}\\ 0&0&0\\ -\frac{1}{4}&0&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&\frac{1}{4}\left(3-y^2\right)&0\\ \frac{1}{4}\left(-3+y^2\right)&0&\frac{y}{4}\\ 0&-\frac{y}{4}&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&0\\ 0&0&0\\ 0&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&-\frac{y}{4}&0\\ \frac{y}{4}&0&\frac{1}{4}\\ 0&-\frac{1}{4}&0\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix}0&0&\frac{1}{4}\left(-1-y^2\right)\\ 0&0&0\\ \frac{1}{4}\left(1+y^2\right)&0&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&y&0\\ -y&0&-\frac{1}{4}\\ 0&\frac{1}{4}&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&0&-\frac{y}{4}\\ 0&0&0\\ \frac{y}{4}&0&0\end{pmatrix} \end{pmatrix}.$$

Подстановка найденных коэффициентов связности в систему (1) позволяет получить систему дифференциальных уравнений, не допускающую явного интегрирования в квадратурах. Для решения задачи введём новую систему координат, задавая неголономное поле базисов в соответствии с равенствами $\vec{e}_1=\partial_1-y\partial_3$, $\vec{e}_2=\partial_2$, $\vec{e}_3=\partial_3$. В этом равенстве векторные поля $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ задают гладкое распределение ранга 2, содержащее касательные векторы к искомым геодезическим. В новых неголономных координатах равенство (2) примет более простой вид:

$$(g_{ij})=\begin{pmatrix}1 & 0 & y\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Очевидным образом заключаем, что полученная нами риманова метрика обладает нулевым тензором кривизны Схоутена. Для этого случая уравнение геодезических имеет вид:

$$\begin{cases}\ddot{x}^a=0,\\ \dot{x}^3=-y\dot{x}^1.\end{cases}$$

Решаем эту систему.

In[12]: = DSolve[{x"[t] == 0, y"[t] == 0, z'[t] + y[t] x'[t] == 0}, {x, y, z}, t]

Out[12]: = {{x→Function[{t}, tC[1] + C[3]], y→Function[{t}, tC[2] + C[4]],

z→Function[{t}, – 1/2t^2C[1]C[2] – tC[1]C[4]+C[5]]}},

Полагая C[1] = C[2] = 1 и C[3] = C[4] = C[5] = 0, графиком параметрических уравнений будет парабола.

In[13]: = ParametricPlot3D[{t, t, — (1/2) t^2 }, {t, –10, 10}, Axes –> None, Boxed –> False].

Из приведённых примеров следует, что эффективность использования компьютерной геометрии при решении творческих задач в значительной

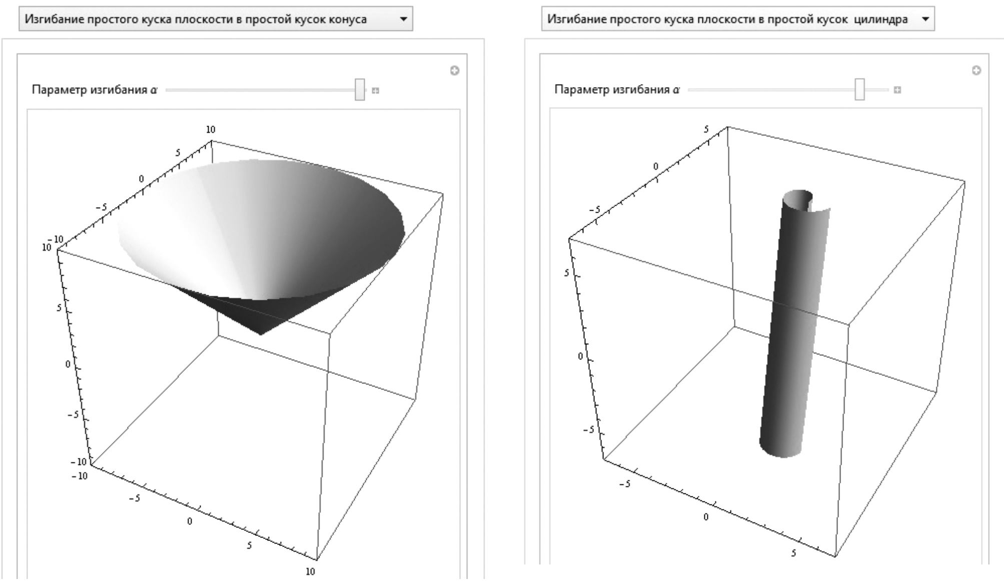

Рис. 2. *Изгибание простого куска цилиндра на простой кусок плоскости и на простой кусок конуса*

степени подкрепляется возможностью использования качественных методов в процессе постановки и исследования проблем, возникающих в предметной области — геометрии, топологии, теоретической механике и т.д.

Использование систем компьютерной математики позволяет решать сложные геометрические задачи, проводить занятия на качественно новом уровне. Для проведения лабораторных занятий, организации самостоятельной аудиторной и внеаудиторной работы студентов, а также подготовки к текущему контролю и промежуточной аттестации нами был разработан электронный образовательный курс «Компьютерная геометрия и геометрическое моделирование» на базе LMS Moodle (http://course.sgu.ru). В электронном курсе формируется банк задач, решения которых выполнены студентами с использованием Wolfram Mathematica, GeoGebra, Maxima. На рис. 2 представлено решение задачи, выполненное студенткой 2015/2016 учебного года.

Для организации коллективной работы используются следующие элементы электронного курса: форум, вики-страницы, вторичный глоссарий. Всё это позволяет включить студентов в продуктивную деятельность по наполнению и расширению электронного образовательного курса. Учебно-исследовательские задачи по компьютерной геометрии можно использовать как инструмент формирования новых знаний, умений и навыков, что позволит будущему бакалавру-математику владеть способностью использовать методы математического и алгоритмического моделирования при решении теоретических и прикладных задач.